

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXVI

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТІСЪКЪ

2

МОСКВА - 1981

УДК 537.8:510.53

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Р.С. Поповиди-Заридзе, Д.Д. Каркашадзе,
Г.З. Ахведиани, Д.Ш. Хатиашвили

Делается попытка найти единый подход к решению внешних и внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца. С использованием метода вспомогательных источников созданы алгоритм и машинная программа, позволяющая получить приближенное решение широкого круга задач, необходимых при проектировании СВЧ-устройств. На примере нахождения собственных электрических полей и собственных волновых чисел продольно-регулярного волновода сложного сечения исследованы возможности метода и приводятся конкретные рекомендации для его использования.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время накопилось большое количество работ, посвященных решению как внутренних, так и внешних задач электродинамики. Несмотря на это, трудно указать на эффективный метод, который с одинаковым успехом применим для решения задач обоих классов. Более того, когда возникает необходимость численной реализации на ЭВМ даже относительно простой задачи расчета продольно-регулярных волноводов конкретной конфигурации поперечного сечения, приходится выбирать метод, наиболее подходящий к специфике данной задачи по простоте алгоритма и требующий минимальных затрат машинного времени. В некоторых случаях приходится комбинировать уже известные методы для составления простого алгоритма и экономной машинной программы.

В настоящей работе на примере нахождения собственных электрических полей и критических частот продольно-регулярного волновода описан метод, который опирается на работы Купрадзе [1], на исследования, проведенные в работах [2, 3], и метод интегральных уравнений. При последующей модернизации предложенный метод может оказаться наиболее удобным для приближенного решения как внутренних, так и внешних задач электродинамики.

1. СЛУЧАЙ ОБЛАСТЕЙ С ГЛАДКИМ КОНТУРОМ

Допустим, дан волновод, продольно-регулярный вдоль декартовой оси Z , с гладким контуром поперечного сечения L , расположенным в плоскости XOY . Требуется найти критические частоты электрических волн и распределение соответствующих собственных полей в поперечном сечении волновода.

Как известно, решение поставленной задачи сводится к решению однородного уравнения Гельмгольца с однородными граничными условиями, а именно, нахождению непрерывного в области D , ограниченной конту-

ром L , решения уравнения

$$(1) \quad \Delta U + g^2 U = 0,$$

удовлетворяющего на контуре L однородным граничным условиям

$$(2) \quad U(x, y)|_L = 0.$$

Следуя схеме, указанной в работе [1], выберем вне области D замкнутый, охватывающий ее, гладкий контур l и построим потенциал простого слоя

$$P(x, y) = \int_l a(l) H_0^{(1)}(g|\vec{\rho} - \vec{\rho}_l|) dl,$$

где $H_0^{(1)}(g|\vec{\rho} - \vec{\rho}_l|)$ — функция Ганкеля нулевого порядка первого рода; $a(l)$ — неизвестная непрерывная плотность на контуре l ; D — область, ограниченная контуром L .

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$(3) \quad U(x, y) = P(x, y) - f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — известное решение исходного уравнения (1), не имеющее особенностей в области D и на границе L .

Такое представление искомого решения позволяет свести поставленную задачу к решению неоднородного, несингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Так как решение ищется в виде потенциала простого слоя, можно утверждать, что полученное интегральное уравнение

$$(4) \quad \int_l a(l) H_0^{(1)}(g|\vec{\rho}_L - \vec{\rho}_l|) dl = f(x_L, y_L)$$

имеет единственное, непрерывное решение, а исходное уравнение (1) — только нулевое, если волновое число g отлично от собственного значения внутренней задачи Дирихле. Кроме того, если g совпадает с одним из собственных чисел области D , уравнение (4) не имеет решений, а союзное с (4) однородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений. Подразумевается, что случайным образом выбранная функция $f(x, y)$ не удовлетворяет условию

$$\int_L \mu(L) f(x_L, y_L) dL = 0,$$

где $\mu(L)$ — решение союзного с (4) однородного уравнения.

Задача состоит в нахождении именно таких волновых чисел g , при которых уравнение (4) не имеет решений, так как такие числа будут соответствовать критическим поперечным волновым числам волновода, а найденные решения союзного с (4) однородного уравнения — собственным полям волновода.

Подынтегральное выражение в уравнении (4) не имеет особенностей и по какой-либо приближенной формуле (например, по формуле трапеций) заменим интеграл в уравнении (4) суммой. Запишем граничное условие (2) в конечном N числе точек на контуре L , количество которых определяется числом членов, сохраняемых в сумме. Тем самым приближенное решение интегрального уравнения (4) сведется к решению неоднородных линейных алгебраических уравнений с матричными элементами

$$(5) \quad a_{nq} = H_0^{(1)}(g|\vec{\rho}_q - \vec{\rho}_n|)$$

и правой частью

$$b_q = f(x_q, y_q),$$

где q — номер строки; n — номер столбца.

Решения a_n полученной системы уравнений позволяют по аналогии с равенством (3) построить приближенное решение исходного уравнения (1) с граничным условием (2).

$$(6) \quad U(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n H_n^{(1)}(g|\vec{\rho} - \vec{\rho}_n|) - f(x, y),$$

где $M(x, y) \in \bar{D}$; $a_n = a(x_n, y_n) \Delta L$.

При $g \neq g_{\text{соб}}$ и $N \rightarrow \infty$ приближенное решение (6) стремится к нулю. По мере приближения волнового числа к одному из собственных значе-

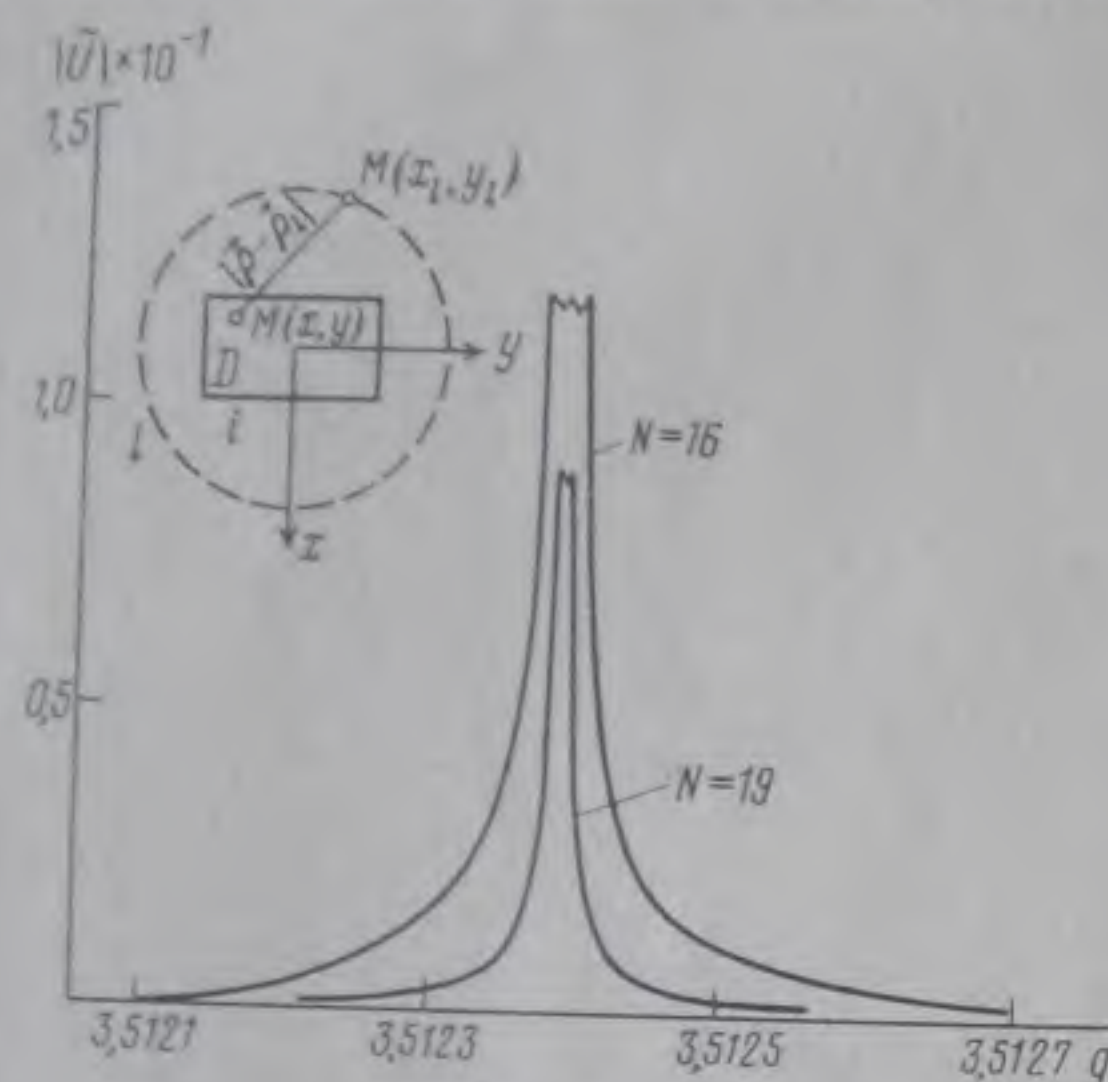


Рис. 1

ний области D для задачи Дирихле U возрастает и достигает своего относительного максимума при $g \approx g_{\text{соб}}$.

Численные исследования, проведенные для различных контуров поперечного сечения L , подтвердили правомерность приведенных утверждений, и они легли в основу машинного алгоритма расчета критических частот и собственных полей продольно-регулярных волноводов со сложным контуром поперечного сечения.

При проведении расчетов для волновода конкретной конфигурации поперечного сечения возникает необходимость подбора вспомогательного контура и количества точек коллокации, обеспечивающих заданную точность расчетов.

Как показали исследования, для расчета собственных полей необходимо брать больше точек коллокации нежели для нахождения критических волновых чисел. Например, для нахождения критических g с точностью 10^{-4} — 10^{-3} достаточно взять 5—6 точек коллокации на длине волны вдоль контура, в то время как для расчета собственных полей с точностью 10^{-3} — 10^{-1} необходимо брать 9—10 точек.

На рис. 1 приведена характерная зависимость модуля приближенного решения U в некоторой точке внутри четырехугольной области от попе-

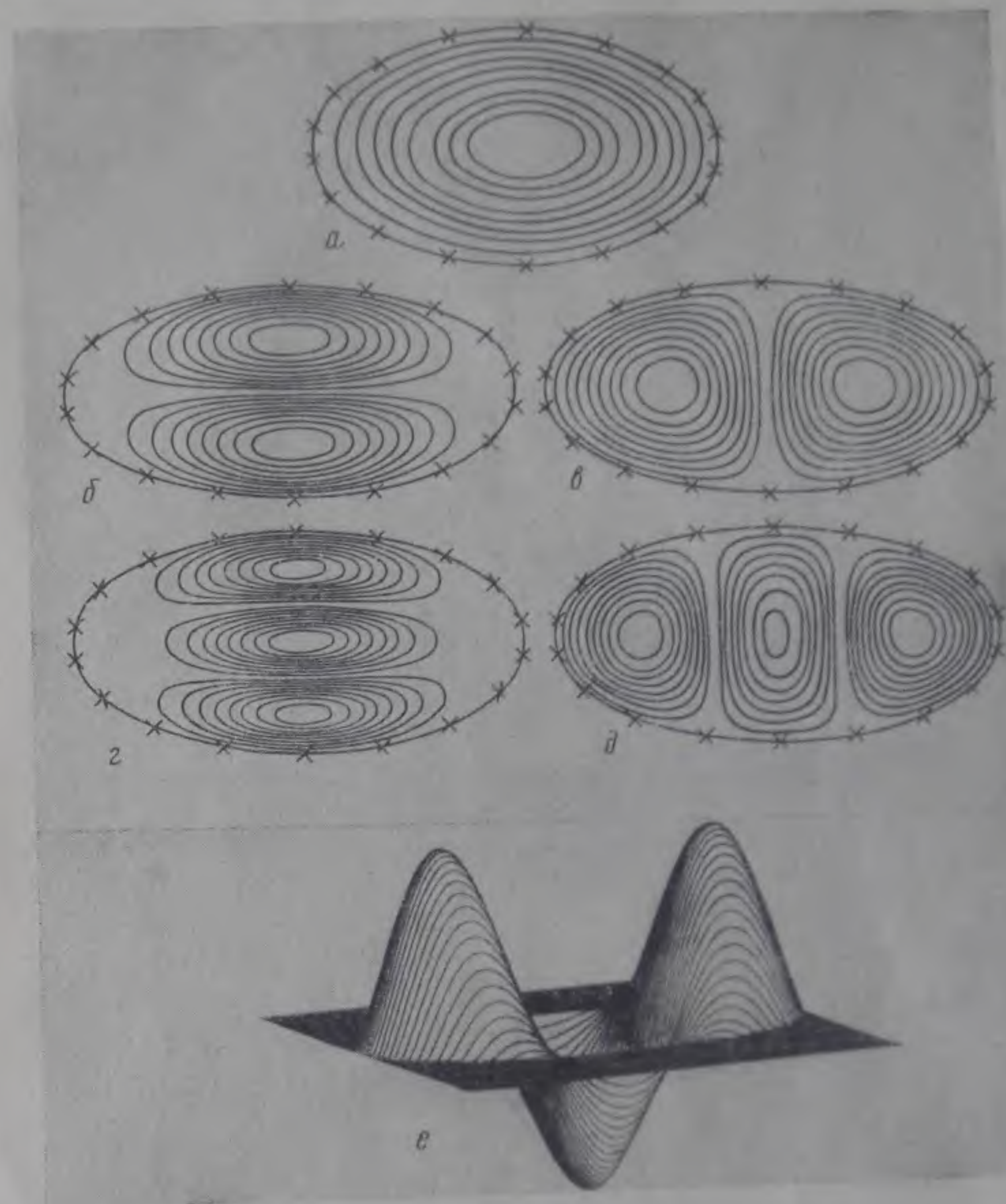


Рис. 2

речного волнового числа g для двух значений числа точек коллокации. Можно заметить, что при изменении N точка максимума не смещается даже для приведенного на графике масштаба для g , в то время как в окрестности $g_{\text{соб}}$ значение поля меняется довольно резко.

При необходимости приближенная оценка погрешности расчета собственных полей для фиксированного количества N точек коллокации допустима по остаточному члену замены интеграла суммой, т. е. при переходе от выражения (3) к (6). Эта оценка будет приближенной, так как определенная погрешность допускается и при решении на ЭВМ системы алгебраических уравнений.

Что касается подбора вспомогательного контура, оказалось, что результаты расчета практически не зависят от его формы, и для простоты алгоритма контур всюду взят в виде окружности, при этом расположение мак-

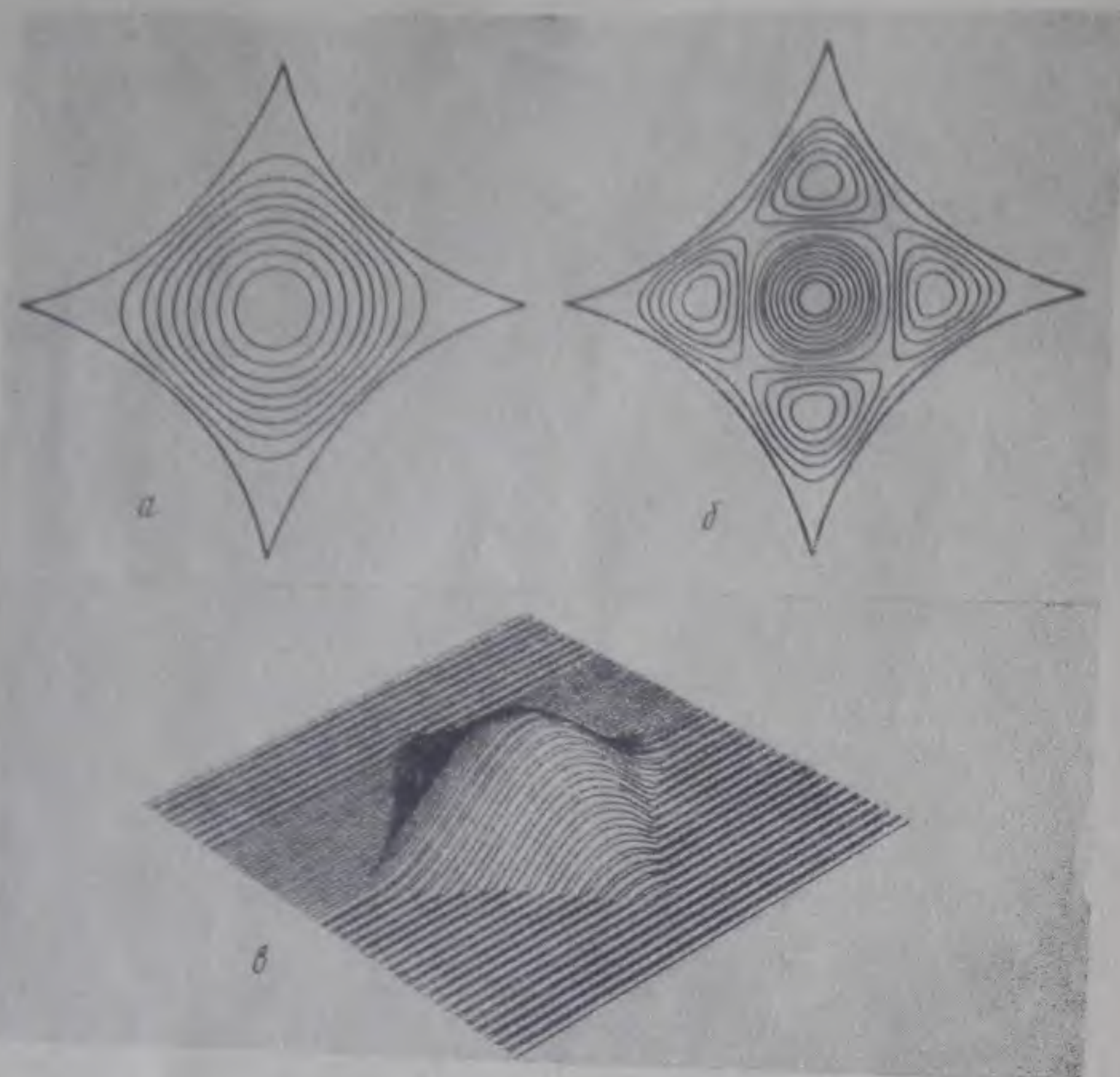


Рис. 3

симумов U не меняется в широком интервале изменения радиуса окружности от $R=0,6C$ до $R=6C$, где C — максимальный диаметр области D .

Эти рассуждения относятся ко всем проверенным гладким контурам при расчете первых трех критических частот.

В подтверждение сказанного на рис. 2 приведены собственные поля эллиптической области, которые изображены в виде линий равных амплитуд продольной составляющей электрического поля. Крестиками обозначены точки коллокации, количество которых вполне достаточно вплоть до отношения малой полуоси к большой, равного 0,05. Максимальное значение поля в области принято за 10 единиц.

Здесь необходимо отметить, что вышесказанное оказалось справедливым и для определенного класса негладких контуров, имеющих точки с неоднозначно определенной внутренней нормалью (точки излома). Ограничение налагается лишь на направление излома, он не должен быть обращен внутрь области. Это подтверждается расчетами, проведенными для четырехугольной, секториальной и гипоциклоидальной областей. При расчете критических частот и собственных полей таких областей никакие трудности не возникают.

К примеру, на рис. 3 приведены картины некоторых собственных полей гипоциклоидальной области.

Случай, когда контур L имеет излом, обращенный внутрь области, требует отдельного рассмотрения.

2. СЛУЧАЙ ОБЛАСТЕЙ, ИМЕЮЩИХ КОНТУР С ИЗЛОМОМ

Рассмотрим продольно-регулярный волновод, имеющий внутренние ребра, т.е. контур поперечного сечения с изломами, обращенными внутрь области (например, случай H -образного, H -образного волновода).

При попытке найти критические частоты и собственные поля таких волноводов с использованием вышеописанного метода оказалось, что местоположение максимумов поля очень чувствительно к малейшим изменениям вспомогательных параметров (количество точек коллокации, радиус вспомогательной окружности). Функции, рассчитанные для тех g , которые соответствуют максимуму поля, не являлись собственными функциями данной области.

Это можно объяснить тем, что представление (3) не учитывает характер поля в окрестности точек внутреннего излома контура.

Совместим вспомогательный контур l с основным контуром L , тогда граничные условия (2) приведут к сингулярному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$(7) \quad \int_L a(L) H_0^{(1)}(g|\vec{\rho}_L - \vec{\rho}_T|) dL = f(x_T, y_T),$$

где $M(x_T, y_T)$ — точки на основном контуре L , в которых ядро интегрального уравнения имеет особенность. Хотя и нельзя утверждать, что

$$(8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a(x_n, y_n) H_0^{(1)}(g|\rho_n - \rho_T|) \Delta L = \int_L a(L) H_0^{(1)}(g|\vec{\rho}_L - \vec{\rho}_T|) dL,$$

как показали исследования [2], всегда можно подобрать вспомогательный параметр $\Delta\rho$ (расстояния от особой точки на контуре до точки коллокации), чтобы рассуждения, аналогичные изложенному в § 1, приводили к вполне приемлемым результатам, но они не будут иметь четкого математического обоснования.

На рис. 4 приведены картины некоторых собственных полей H -образного волновода, рассчитанного по указанной схеме при различных параметрах контура. Здесь параметр $\Delta\rho$ удовлетворяет условию $\Delta\rho N = 0,05P$, найденному из анализа сходимости результатов, где P — периметр основного контура.

Как легко заметить, определенным недостатком изложенного подхода является то, что требуется большое количество точек коллокации, а также заметная рябь собственного поля у границы области. Она отчетливо видна на картинах линий равных амплитуд (рис. 4, а, б) и рельефа собственной функции (рис. 4, в).

Из всего сказанного можно заключить:

а) если основной контур не имеет внутренних изломов, вспомогательный контур целесообразно брать вне основной области;

б) если основной контур имеет внутренние изломы, решение, представленное в виде (3), не описывает истинную картину поля внутри области, и основную задачу можно решить, совмещая вспомогательный контур с основным, но при этом ухудшается сходимость результатов.

Следовательно, если основной контур L имеет в точке $M(x_T, y_T)$ внутренний излом, вспомогательный контур целесообразно вынести из основной области, а в точке излома оставить особенность, т.е. вместо представ-

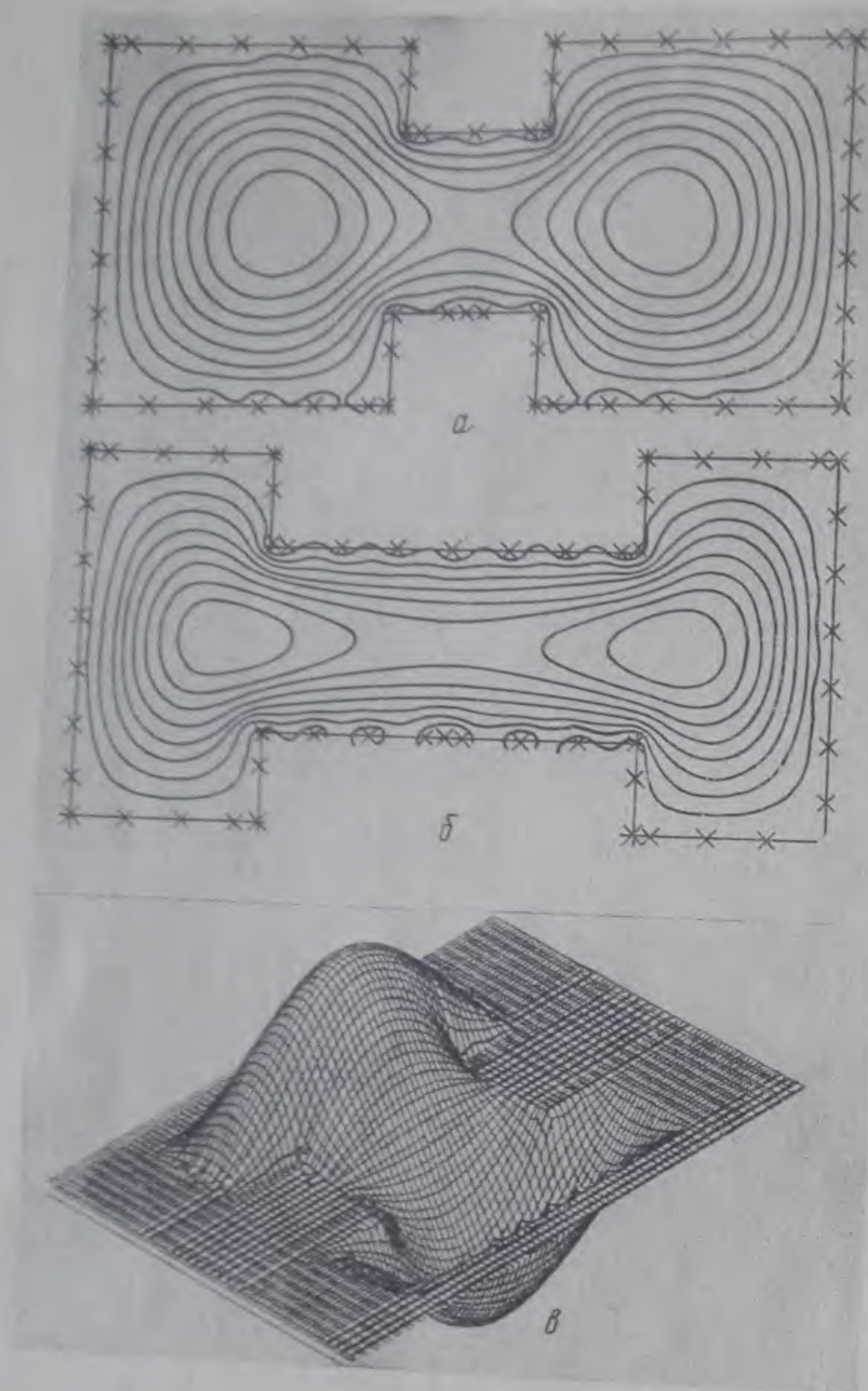


Рис. 4

ления (3) поле искать в виде

$$(9) \quad U(x, y) = P(x, y) - f(x, y) + \alpha H_0^{(1)}(g|\vec{\rho} - \vec{\rho}_T|),$$

где ρ_T — полярная координата точки излома; α — неизвестный коэффициент, определяемый из граничных условий. При этом вид особенности поля вблизи точки геометрической сингулярности определяет третье слагаемое в выражении (9)

$$(10) \quad \alpha H_0^{(1)}(g|\vec{\rho} - \vec{\rho}_T|) \approx \frac{2i}{\pi} \ln(\vec{\rho} - \vec{\rho}_T)^2$$

при $g|\vec{\rho} - \vec{\rho}_T| \ll 1$.

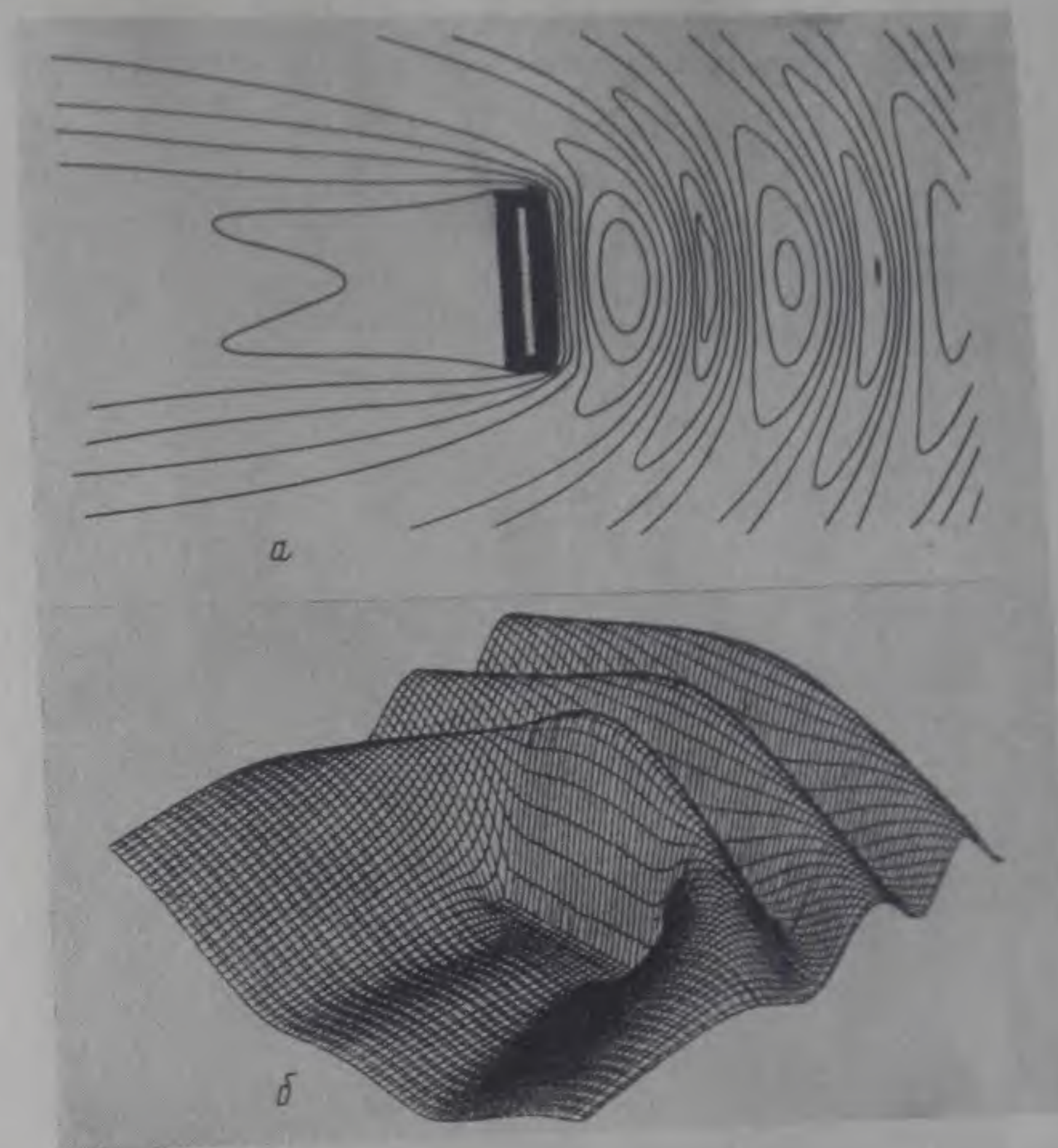


Рис. 5

Как показали расчеты, при правильном подборе вспомогательного параметра $\Delta\rho$ представление поля в виде (9) обеспечивает хорошую сходимость и пропадают осцилляции линий равных амплитуд у границы области.

Основные выводы, сделанные при решении первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца методом вспомогательных источников, легко обобщить на случай решения второй краевой задачи, задачи Неймана, при этом изменяются лишь матричные элементы (5).

Описанный алгоритм позволяет решать и внешние задачи. Для этого достаточно вспомогательный контур взять внутри области, ограниченной основным контуром L , а функцию $f(x, y)$ в виде падающей волны и дальше действовать по схеме, изложенной в § 1 или 2 в зависимости от свойств основного контура.

К примеру, на рис. 5 приведены линии равных амплитуд электрического поля в ближней зоне при рассеянии плоской волны бесконечным стержнем. Так как вдоль одной из декартовых осей четырехугольным стержнем, обращенные во внешнюю основную область, расчеты проведены согласно § 2 с использованием той же программы, которая решала внутреннюю задачу.

В заключение можно сказать, что во всех случаях метод вспомогательных источников наиболее удобен, когда основной контур не имеет

излома, обращенного внутрь основной области. В случае наличия излома задача также разрешима при правильном подборе вспомогательного параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Купрадзе, Методы потенциала в теории упругости, ГИФМЛ, 1963.
2. Р. С. Поповиди, Диссертация, 1972.
3. З. С. Цверикмазашвили, Диссертация, 1977.

Поступила в редакцию
23 XI 1979