АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

ПРЕПРИНТ № 14(386)

Р. С. Поповиди-Заридзе

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ

МОСКВА — 1984

Р.С. Поповиди-Заридзе
Метод вспомогательных источников

Подписано в печать 04.05.84.Т-10125, цена 65 коп.
Формат 60х90 1/16. Объём 2,6 п.л. Тираж 430 экз.
Ротапринт ИРЭ АН СССР. Зак.95

I. Введение

Существующие в настоящее время методы решения задач электродинамики можно условно разделить на три группы.

I. Аналитические (точные или асимптотические) методы, которые выражают решение через элементарные или специальные функции. Роль ЭВМ при этом невелика, так как поставленная задача сводится к расчету по полученным сравнительно простым формулам. Решение удается найти для идеализированных случаев, часто далеких от практически нужных систем и поэтому число задач, поддающихся аналитическому рассмотрению, сильно ограничено.

2. Численно-аналитические методы, при использовании которых задача после той или иной аналитической обработки сводится к бесконечной системе линейных уравнений или к интегральным уравнениям, требующим численного решения. Класс решаемых задач этими методами сравнительно шире.

3. Численные методы, которые используют минимальную аналитическую обработку. Платой за это является большая работа по программированию и увеличение требования к объему оперативной памяти и быстродействию ЭВМ.

Современные численные методы применительно к одной и той же электродинамической задаче существенно различаются по сложности и объему вычислений. Они обеспечивают точность счета, вполне достаточную для инженерных расчетов, что позволяет рассматривать их на равных правах с предыдущими. При этом численные методы значительно превосходят их в гибкости и универсальности и с растущими возможностями ЭВМ единственно способны удовлетворить современные требования прикладников и инженеров, конструирующие элементы и узлы СВЧ радиоэлектронных устройств.

В свою очередь численные методы условно (ввиду наличия тесной связи) можно разбить на две группы. Это методы, в которых аппроксимируются исходные дифференциальные или интегральные операторы краевой задачи (метод конечных разностей, метод интегральных уравнений) и методы, в которых аппроксимируется неизвестная функция.

Методы, объединенные во вторую группу, допускают различный подход к реализации основной идеи - аппроксимации искомого решения исходного дифференциального или интегрального уравнения линейной комбинацией элементов некоторой полной линейно независимой системы функций. Эти методы отличаются друг от друга по принципу выбора базисных функций или по методу определения неизвестных коэффициентов разложения.

Среди этих методов по простоте, универсальности и алгоритмичности следует выделить методы, в которых по полной системе неортогональных функций разлагаются непосредственно составляющие электрического или магнитного поля, а для определения неизвестных коэффициентов разложения применяется метод ортогонализации, метод наименьших квадратов или метод коллокации.

Эти методы при конкретных расчетах, без предварительного исследования не всегда могут оказаться достаточно эффективными. Определяющее значение имеет выбор базисных функций, обеспечивающих быструю сходимость ряда, устойчивость системы уравнений, выбор вспомогательных параметров, метода определения неизвестных коэффициентов и т.д.

И в этом случае необходимо провести дополнительные исследования по оптимизации остальных вспомогательных параметров для минимизации машинного времени. Опыт почти 20-летней работы с использованием метода вспомогательных источников (частного случая метода неортогональных рядов) показал, что после тщательного исследования по оптимизации вспомогательных параметров метод может быть сделан почти универсальным, способным решить широкий класс прикладных задач, почти всегда существует возможность сделать программу расчета более гибкой, быстродействующей, с широкими возможностями и границами применимости.

Следует отметить, что оптимизация параметров имеет четкий физический смысл и поэтому их подбор может быть осуществлен в начале решения задачи.

Данная работа посвящена исследованию этих вопросов, описанию быстродействующих и универсальных программ для решения электродинамических задач.

2. Решение задач дифракции методом вспомогательных источников.

В лекциях на I-ой всесоюзной школе-семинаре по дифракции и распространению волн, проходившей в 1965 году в Паланге [I] а затем в 1967г. в журнале "УМН" [2] была представлена работа В.Д.Купрадзе, в которой предлагались некоторые приближенные методы решения граничных задач математической физики и, в частности, задач электродинамики.

Один из них связан с представлением решения задачи дифракции вне тела в виде разложения по системе фундаментальных решений уравнения Гельмгольца с особенностями в нефизической области. Затем из системы выбранных таким образом функций строилась система ортонормированных базисных функций и коэффициенты разложения определялись из граничных условий.

С тех пор предложенный метод был использован многими исследователями для решения различных задач: решены задачи теории упругости и геофизики [3], трехмерные задачи дифракции [4,5] задачи электростатики [I9], некоторые задачи дифракции и задачи расчета собственных чисел некоторых волноведущих систем [6,7]. С I968 г. в контакте с В.Д.Купрадзе на физическом факультете ТГУ совершенствовался метод для решения задач дифракции на металлодиэлектрических конечных и периодических структурах в области резонансных значений параметров [8,9,I0]. С применением физической интерпретации метод использован для расчета собственных чисел и собственных полей полых металлических, диэлектрических и металлодиэлектрических волноводов сложного сечения [II,I2].

На простейшем примере двумерной задачи метод можно сформулировать следующим образом:

Пусть надо найти решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0 \qquad (I)$$

в области вне D при удовлетворении граничных условий на контуре S

$$LU|_S = Lf(x,y). \qquad (2)$$

L - ограниченный непрерывный оператор; в случае E-поляризации $L = I$, а в случае H-поляризации

$$L = \frac{\partial}{\partial n}, \qquad (3)$$

где n - внешняя нормаль к контуру S.

Такой постановке соответствуют задачи дифракции волны $f(x,y)$ на идеально проводящих телах. Построим в области D гладкий замкнутый контур ℓ и на нем выберем счетное всюду плотное множество точек (x_n, y_n). В качестве системы функций для предс-

тавления решения выберем фундаментальные решения уравнения Гельмгольца с особенностями в точках x_n, y_n

$$V_n = LH_0^{(1)}(kr_n), \qquad (4)$$

где $r_n = \sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2}$, x,y - координаты точки наблюдения.

Заметим, что каждый элемент системы удовлетворяет исходному волновому уравнению и условию излучения на бесконечности. Кроме этого, в указанных работах В.Д.Купрадзе доказана полнота и линейная независимость системы функций (4). Это дает право утверждать, что приближенное решение уравнения (I), построенное в виде

$$\tilde{U} = \sum_{n=1}^{N} a_n LH_0^{(1)}(kr_n) \qquad (5)$$

можно приблизить среднеквадратично к непрерывной функции $f(x,y)$ на контуре S, т.е. при всяком $\varepsilon > 0$ найдутся такие N и a_n^N, что для любой непрерывной на S функции $f(S)$ будет выполняться неравенство

$$\int_S \left| \sum_{n=1}^{N} a_n^N LH_0^{(1)}(kr_n) - Lf(s) \right|^2 dS < \varepsilon(N). \qquad (6)$$

Здесь a_n - комплексные коэффициенты, которые в нашем случае при решении задач дифракции определялись методом коллокации, т.е. удовлетворением граничных условий в N точках на контуре S, где N - число членов в представлении (5). В результате получаем систему линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов a_n

$$\sum_{n=1}^{N} a_n LH_0^{(1)}(kr_{mn}) = Lf(S_m) \quad m = 1,2,\dots N. \qquad (7)$$

При решении задач дифракции, например при дифракции E-поляризованной волны на диэлектрических цилиндрах с параметрами ε, μ

должны быть определены поля и внутри области D , а на контуре S должны быть непрерывны тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей. Для этого удобнее в каждой однородной части пространства в качестве искомой функции выбрать, например, составляющую электрического вектора Герца в виде

$$\Pi_1 = \sum_{n=1}^{N} a_n H_0^{(1)}(\kappa_1 r_{1n})$$

$$\Pi_2 = \sum_{n=1}^{N} b_n H_0^{(1)}(\kappa_2 r_{2n})$$

с неизвестными комплексными коэффициентами a_n и b_n . Далее, используя известные соотношения, можно найти составляющие электрического и магнитного полей и затем из граничных условий определить неизвестные коэффициенты a_n и b_n .

В случае решения трехмерных задач в качестве базисных функций необходимо выбрать фундаментальные решения трехмерного уравнения Гельмгольца $e^{i\kappa r_n}/r_n$ с особенностями на некоторой пространственной поверхности вне области, где поле определяется выбранными источниками.

Построенному решению в виде (5) можно придать наглядный физический смысл. Так например, в работах [I3,I4] , опубликованных в I972 г., решены двумерные задачи дифракции на конечном числе идеально проводящих цилиндров сложного сечения методом замены сплошной отражающей поверхности проводами малого радиуса, переизлученное поле каждого из которых описывается функцией Ханкеля. Поле цилиндрического тела приближенно может быть описано в виде (5), причем коэффициенты a_n имеют смысл плотности тока, текущего по проводам, центры которых сдвинуты относительно основного контура. С таким подходом в работе решались задачи дифракции и на

конечном числе тонких бесконечно проводящих полосок.

3. Решение внутренних задач методом вспомогательных источников.

В работе [I4] отмечалось, что для некоторых значений относительного периметра κa сходимость в (5) ухудшается. Там же приведен рис.I, где дана зависимость значения рассеянного от кругового цилиндра поля в дальней зоне под углами 135^0 и 180^0 от относительного периметра κa при падении на цилиндрах плоской волны; вспомогательные источники брались вблизи поверхности цилиндра, т.е. вблизи окружности радиуса a . Можно заметить, что при некоторых "критических" значениях κa поле отличается от истинного (сплошная линия). По этой причине, решая задачу дифракции, необходимо выбирать нерезонансный вспомогательный контур или же дополнительный источник (хотя бы один) взять внутри контура.

Подробные исследования показали, что критические значения κa с большой точностью совпадают с собственными значениями области, ограниченной вспомогательным контуром, а поля внутри вспомогательного контура описывают собственные поля данной области. Более того, такие же картины собственных полей наблюдаются внутри основного резонансного контура, если вспомогательный контур взят вне области D ; т.е. всегда резонирует внутренний контур. Именно эти результаты исследований послужили основой создания простого алгоритма и машинной программы для расчета собственных полей и постоянных распространения целого ряда волноведущих систем. При этом, конечно, вспомогательный контур надо брать вне исследуемой области D .

Эту возможность можно обосновать следующим образом:

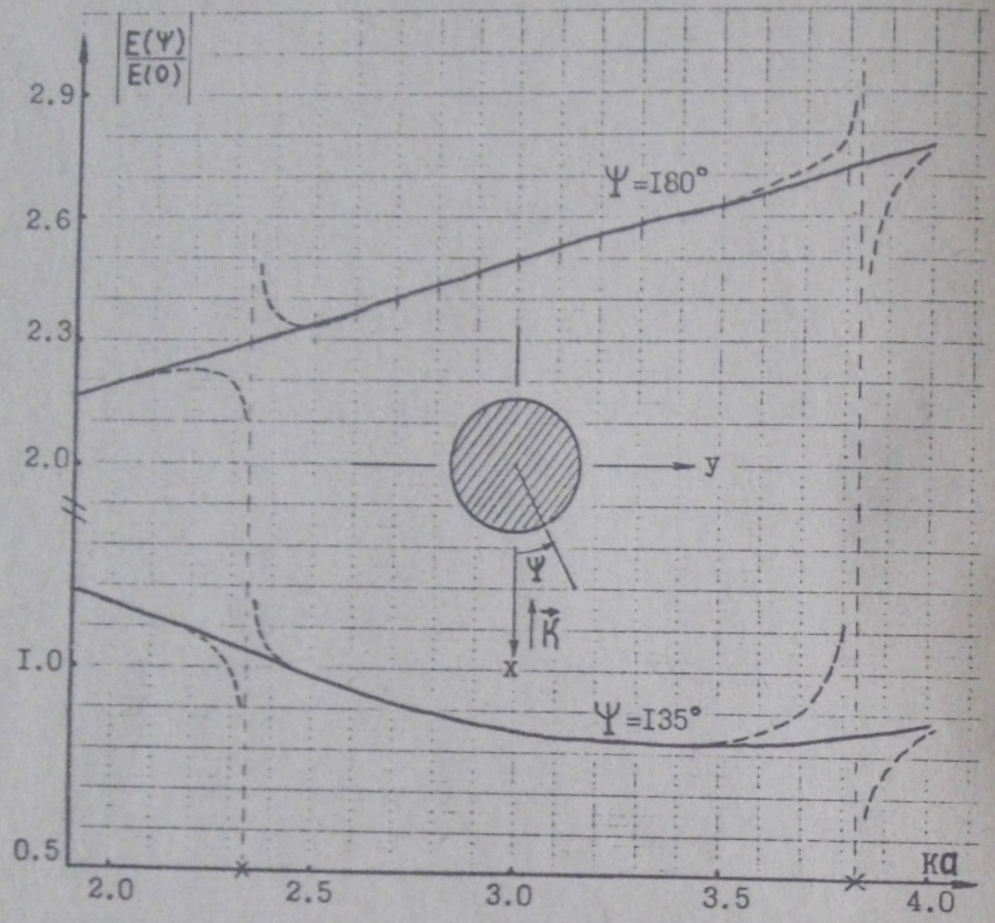


Рис. I. Зависимость рассеянного поля от относительного периметра ka при дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем круговом цилиндре: $E(\Psi)$ - напряженность z - составляющей электрического поля в дальней зоне; Ψ - полярный угол наблюдения; сплошная линия - аналитическая кривая; пунктирная линия - расчетная кривая; крестиками обозначены корни функции Бесселя. ($J_n(ka)=0$)

Учитывая аналитичность системы функций в сумме (7) на контуре S можно перейти к пределу при $N\to\infty$. При бесконечном увеличении числа N система точек x_n, y_n превратится в контур ℓ. Тогда получим неоднородное несингулярное интегральное уравнение

$$\int_{\ell} a(\ell)\, L H_0^{(1)}(\kappa r_{s\ell})\, d\ell = L f(s) \qquad (8)$$

относительно неизвестной плотности $a(\ell)$, связанной с неизвестными коэффициентами a_n определенным образом. Уравнение (8) несингулярное, так как вспомогательный контур не имеет общих точек с основным контуром (т.е. с поперечным сечением исследуемого тела).

Заметим, что решение поставленной задачи можно начать с решения аналогичного сингулярного интегрального уравнения, когда контуры основной и вспомогательный совпадают. Существование коэффициентов a_n для любого непрерывного на контуре S функции $f(s)$ при $\kappa\neq\kappa_i$ (κ_i - собственное значение области D) гарантирует существование решения $a(\ell)$ интегрального уравнения и наоборот. Но как известно, интегральное уравнение (8) не имеет решения при $\kappa=\kappa_i$, которые являются собственными числами соответствующего однородного интегрального уравнения. Это обстоятельство можно использовать для обоснования метода определения собственных функций и собственных значений полых и диэлектрических волноводов.

Предположим, что необходимо найти критические волновые числа и соответствующие собственные функции продольно регулярного волновода с контуром поперечного сечения S в плоскости XOY. Такая электродинамическая задача сводится к отысканию непрерывного в об-

ласти D решения уравнения (I), удовлетворяющего на S однородному граничному условию (2), когда $f(x,y)=0$.

Как известно, поставленная краевая задача имеет нетривиальное решение для дискретного множества κ_i значений κ , называемыми собственными значениями области D .

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$Lu(x,y)=\int_{\ell} a(\ell)LH_0^{(1)}(\kappa r_{s\ell})\,d\ell - f(x,y), \qquad (9)$$

где $f(x,y)$ - известное аналитическое в $D+S$ частное решение уравнения (I). $a(\ell)$ - неизвестная плотность на контуре ℓ , позволяющая удовлетворить граничному условию (2). Такое представление искомой функции позволяет свести решение задачи на собственные значения к проблеме существования решения несингулярного неоднородного интегрального уравнения (8).

Решая неоднородное уравнение для различных значений параметра κa , легко обнаружить те значения κa , при которых решение уравнения перестает существовать. Именно эти $\kappa=\kappa_i$ будут соответствовать собственным значениям области D . Можно было бы решать непосредственно однородное уравнение [7]

$$\int_{\ell} a(\ell)H_0^{(1)}(\kappa r_{s\ell})\,d\ell = 0 , \qquad (10)$$

но при численных расчетах, как оказывается, можно указать более точно, где перестает существовать решение неоднородного уравнения, нежели найти параметр κ , при котором существует решение однородного уравнения.

В подтверждение сказанному на рис. 2 приводятся картины поля в ближней зоне, когда основной (внутренний) контур четырехугольный, вспомогательный круговой, $f(x,y)=e^{i\kappa x}$, $\lambda_{кр}=2.0000$ при поиске первой Н-волны. Для $\lambda=2.005$ поле во всей внутрен-

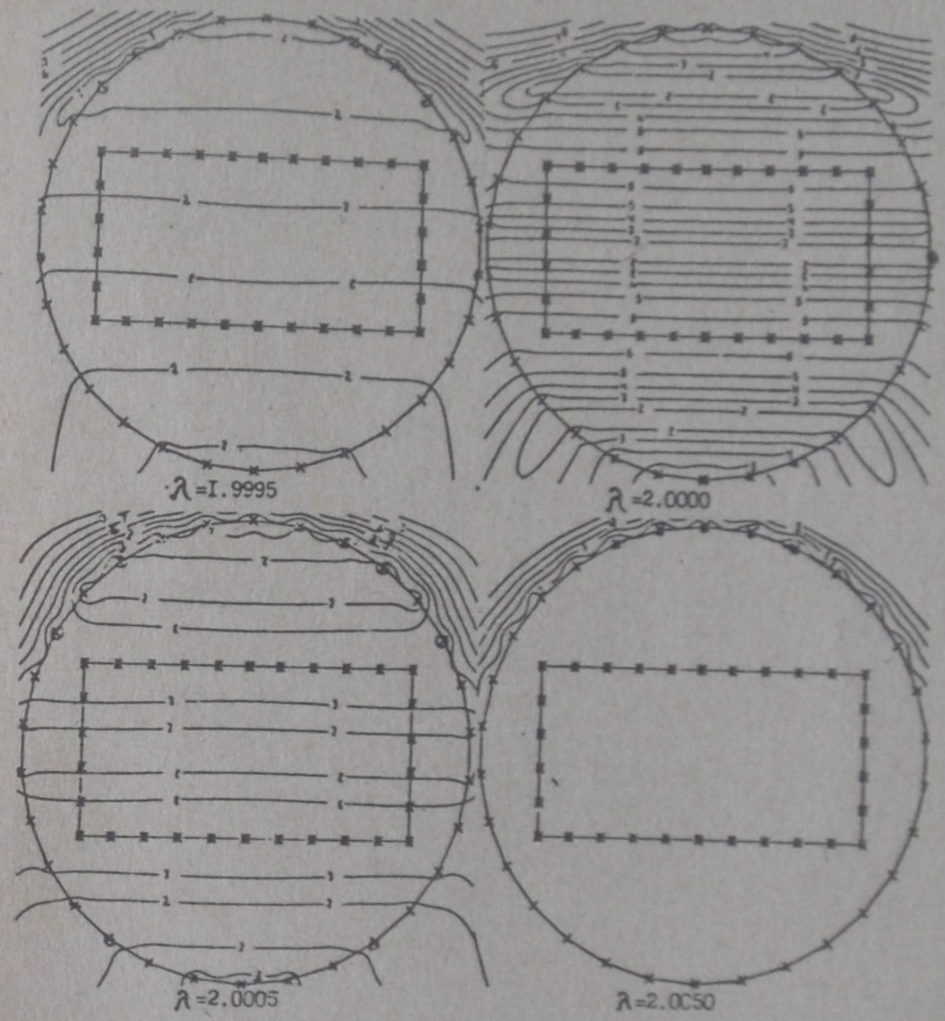


Рис.2. Линии равных амплитуд численного решения при различных значениях параметра λ .

ней области равно нулю и с приближением к $\lambda_{кр}$ поле просачивается в область, ограниченную вспомогательными источниками.

Таким образом, с приближением волнового числа κ к собственному значению области D для решения внешней задачи, внутри области возникают собственные колебания, т.е. появляется приближенное решение однородного уравнения (10), которое, накладываясь на решение системы неоднородных уравнений, не нарушает граничного условия.

Решая неоднородную систему линейных алгебраических уравнений для различных значений κ и наблюдая за поведением приближенного решения в какой-либо точке внутри области D

$$\tilde{u}(x_0 y_0) = \sum_{n=1}^{N} a_n H_0^{(1)}(\kappa r_n) - f(x_0 y_0),$$

видим, что вдали от собственных значений области имеем $\tilde{u}(x_0, y_0) = 0$ и собственные колебания не возникают, так как функция $f(x,y)$ компенсируется всюду в области D. По мере приближения параметра κ к одному из собственных значений области детерминант системы стремится к нулю, появляется приближенное решение однородного уравнения, которое возрастает и достигает своего относительного максимума при $\kappa = \kappa_i$. Все это выполняется тем точнее, чем больше N.

Приближенное решение удовлетворяет граничному условию и является решением уравнения Гельмгольца и поэтому описывает собственное поле области D при найденном таким образом значении $\kappa = \kappa_i$. Функции $\tilde{u}_i$ при этих κ_i есть собственные функции.

Если считать, что любому математическому аппарату соответствует своя физика, то представленному математическому методу поиска собственных значений и собственных функций может соответствовать

следующая физика. Аналитическая в области D функция $f(x,y)$, описывающая падающую волну, содержит параметр κ и представляет собой возбудитель исследуемой резонансной системы. Когда параметр κ возбуждающей волны совпадает с собственным числом системы, наступает резонанс и значение поля в некоторой точке внутри области резко возрастает.

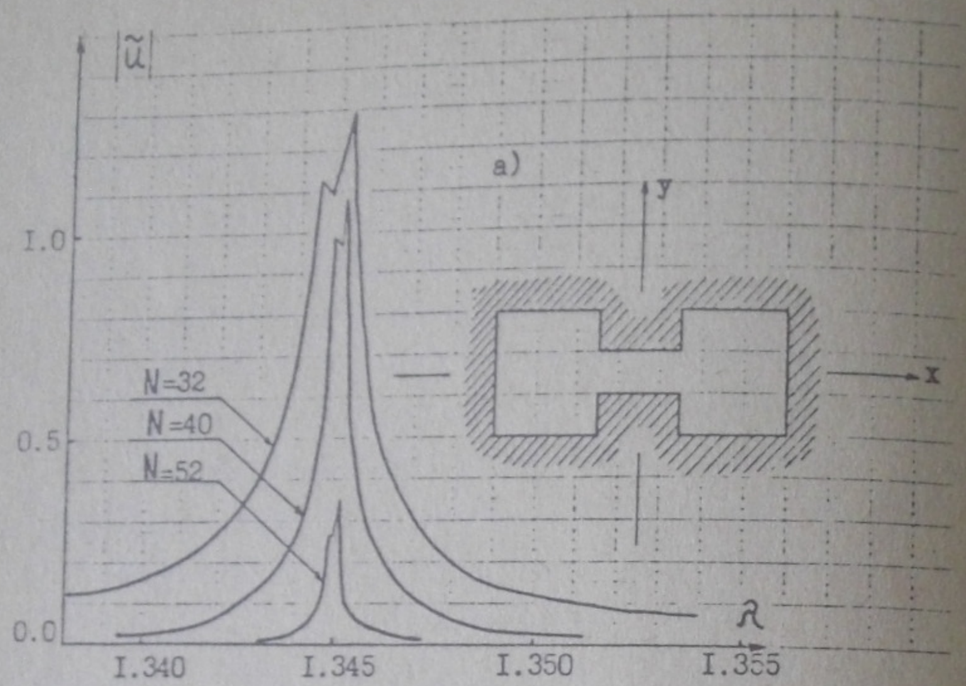
Результаты численных экспериментов подтвердили правомерность этой модели. Так например, на рис. 3а приводится зависимость от длины падающей волны значения приближенного решения $\tilde{u}$ в случае E-поля в точке внутри H-образного волновода при различном числе точек коллокаций на всем контуре S. Максимальное значение $\tilde{u}$ в исследуемой области возрастает примерно на два-три порядка по сравнению с нерезонансным κ.

Можно заметить, что с увеличением N максимум становится уже, острее и максимальное значение при этом все больше возрастает, как будто система становится все добротнее. Там же в виде линий равных амплитуд приводится картина собственной волны волновода, определенная расчетом $\tilde{u}$ указанной области.

Решение большого числа конкретных задач убеждает, что описанный метод расчета (по сравнению с традиционным методом решения однородного уравнения) позволяет значительно точнее определить собственные числа, упрощает расчет собственных функций и, главное, расчет высших типов волн не требует дополнительного увеличения точности счета (увеличения числа N).

Перечислим некоторые вычислительные особенности метода, с которыми приходится сталкиваться при решении конкретных задач. Легко заметить, что этот метод содержит в себе вспомогательные параметры, от которых не должны зависеть решения. К таковым относятся:

I. Характеристики вспомогательного контура (форма и размеры),



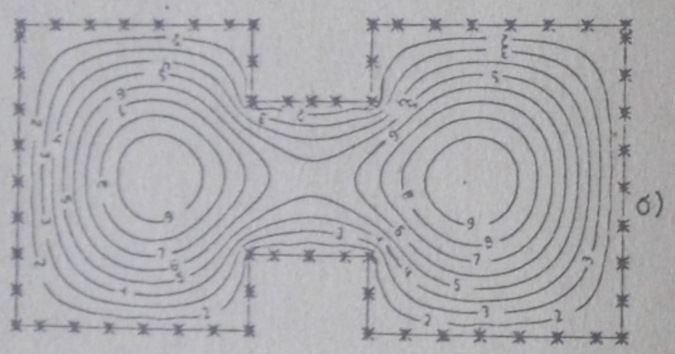


Рис.3. а) Зависимость численного решения $\tilde{u}$ от параметра λ для H-образной области:
N - количество точек коллокации на половине контура; отношение сторон - $a/b=0.5$; ширина выступа - $\Delta=0.4$; высота выступа - $h=0.25$.
б) Линии равных амплитуд численного решения в точке $\lambda=1.345$.

2. Способ распределения точек коллокации на основном контуре и распределения фиктивных источников на вспомогательном контуре.

3. Число вспомогательных источников.

Существенным вопросом, как в любом численном методе, является вопрос о точности счета.

Опыт решения широкого круга задач электродинамики (дифракции и поиска постоянных распространения регулярных волноводов) с использованием рассматриваемого метода показал, что этот метод весьма эффективен в случае правильного подбора вспомогательных параметров, так как в противном случае вычислительный процесс может расходиться. Оптимальный подбор параметров обеспечивает при заданной точности счета минимальные затраты машинного времени.

Этими вопросами займемся в следующем параграфе.

4. Выбор вспомогательных параметров.

Заметим, что в математической формулировке метода, предложенном В.Д.Купрадзе, в качестве вспомогательного контура можно взять произвольный замкнутый контур, лежащий в нефизической области D, где искомая функция не определена. В работе [2] доказывается, что на любом таком контуре определенная система базисных функций полна и линейно-независима и с увеличением плотности вспомогательных источников (т.е. с увеличением числа базисных функций) приближенное решение будет стремиться к истинному.

Конкретная реализация метода показала, что от выбора вспомогательного контура существенно зависит степень обусловленности, устойчивость и скорость сходимости решения системы алгебраических уравнений с увеличением числа N. А в некоторых случаях вычислительный процесс даже расходится.

Из общих соображений по выбору вспомогательного контура сле-

дует, что должен существовать некий оптимальный, с точки зрения приведенных выше рассуждений, контур.

Действительно, матричными элементами решаемой системы линейных уравнений являются значения комплексных функций Ханкеля нулевого порядка с аргументами Kr_{mn}, где r_{mn} - расстояния от точек особенностей до точек коллокаций. Диагональные члены имеют в аргументах Kr_{ii}, т.е. значения r_{mn}, когда индексы совпадают. Поэтому, аргументы диагональных элементов будут минимальные, а значения диагональных элементов максимальные.

Если вспомогательный контур находится вблизи основного контура, значения диагональных членов будут сильно превалировать над остальными членами и соответствующая матрица является хорошо обусловленной, а с удалением обусловленность будет ухудшаться. В предельном случае, когда вспомогательный контур вырождается в точку, элементы матрицы системы или ее строчки становятся тождественно равными и система не имеет решения.

С другой стороны, функция рассеянного поля вдоль основного контура при малых удалениях центров источников будет сильно осциллирующей и для обеспечения одинаковой точности счета следует брать больше членов разложения. С увеличением расстояния, функция станет более гладкой и между точками коллокаций будет осциллировать слабее. Следовательно, с удалением вспомогательного контура среднеквадратичная погрешность будет уменьшаться.

С физической точки зрения это должно быть очевидно, если заметим, что использованный метод эквивалентен замене поля сплошной отражающей поверхности дискретными переизлучателями элементарных цилиндрических волн и с удалением от поверхности центра излучения последнего все большая часть поверхности может быть заменена одним источником. Тем самым функция, описывающая рассеян-

ное поле на поверхности тела, будет более гладкая.

Анализ сходимости результатов расчета различных задач также дает основание сказать, что существуют физически обоснованные общие для всех задач рекомендации по выбору оптимального контура. Сформулируем их на примерах конкретных задач.

5. Учет сложности рассеивающего тела.

Как известно, задача дифракции продольно поляризованной электромагнитной волны на уединенном проводящем круговом цилиндре строго решается методом разделения переменных. Нижеприведенное решение ставит своей задачей исследование возможностей нашего метода путем сравнения с точным решением задачи.

Выражение рассеянного электрического поля цилиндром радиуса a ищется с особенностями внутри металлического цилиндра на окружности радиуса $a_0 < a$.

На рис. 4 приводятся результаты исследования стабилизации числа знаков для рассеянной круговым цилиндром плоской электромагнитной волны в зависимости от числа N при ka =0.5, 0.2, I.0, 2.0, 5.0 и различных значений параметра $B = a_0/a$.

Из приведенных кривых можно заключить, что при $0.1 < B < 0.4$ имеем наилучшую сходимость для всех значений ka.

Отметим, что при равных значениях B характер стабилизации идентичен - имеем пучок однотипных кривых. Это свойство особенно четко выражено при больших значениях B, когда скорость сходимости становится значительно хуже. Такая сходимость имеет место и в случае более сложных поверхностей, если имеется возможность отодвинуть вспомогательный контур от границы.

Для фиксированного значения ka при любых значениях B

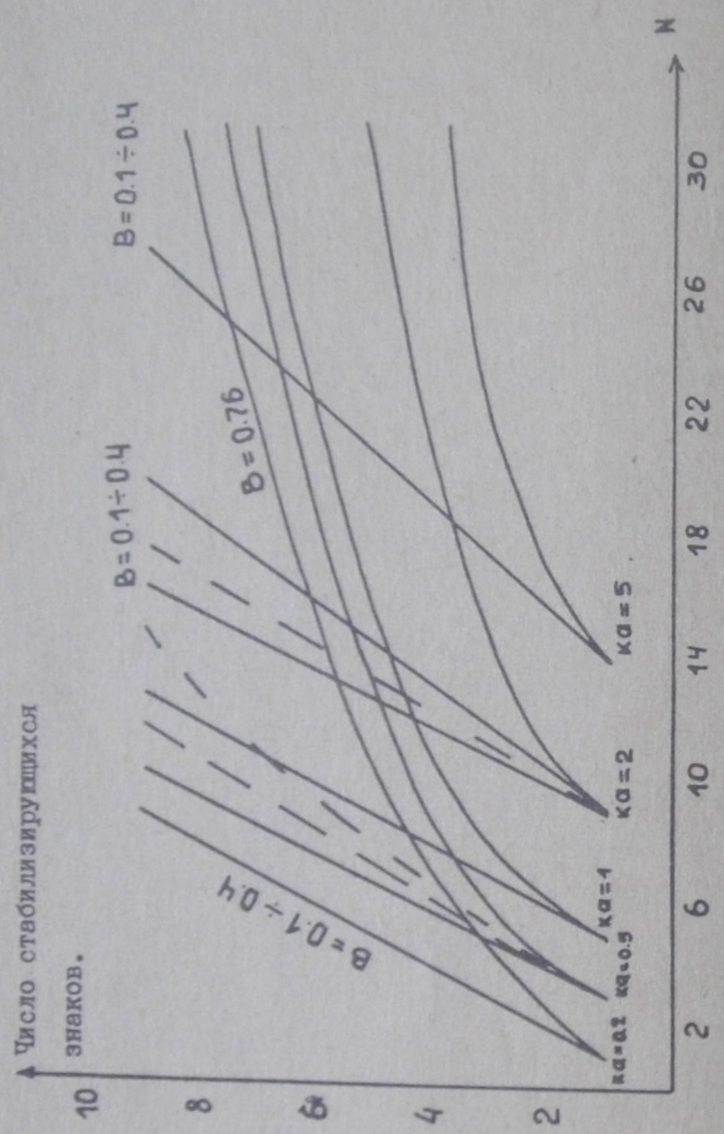


Рис. 4. Характер сходимости результатов счета при падении плоской волны на один цилиндр.

первые знаки значения E_0 стабилизируются при одном и том же N. Отсюда можно заключить, что существует минимальное число точек коллокаций, которые аппроксимируют основной контур. С увеличением ka пучок однотипных кривых сдвигается к большим значениям N. Это вполне понятно, так как точность счета должна зависеть от числа точек коллокации на единице длины периметра и с увеличением ka необходимо увеличить число N.

Отметим еще один существенный факт. Для малых значений B, независимо от величины ka, существует такое максимальное значение N, после которого система уравнений на ЭВМ не решается и выходит из решения с диагностикой "матрица сингулярная".

Так например, при $B=0.1$, после $N=18$ система уже не решается, а при $B=0.4$ - после $N=40$. На рис. 5а приводится кривая указанной зависимости N_{max} от значения ka. После $B=0.6$ N резко возрастает. Указанный результат является следствием того, что при малых значениях B с увеличением N элементы матрицы все меньше отличаются друг от друга и матрица становится плохо обусловленной. Конкретное значение N, после которого матрица становится плохо обусловленной, вероятно, зависит от подпрограммы системы и точности решения ее на ЭВМ, но, так или иначе, этот результат закономерен и при решении с меньшей точностью (например на ЭВМ более низкого класса) этот вопрос станет, очевидно, более существенным.

Все это уже накладывает некоторое ограничение на использование малых значений B при решении внешних задач дифракции на одиночных телах, так как например, при $ka=5$ для расчета полей с точностью до третьего-четвертого знака необходимо, по крайней мере, брать $N=20$. Однако при $B=0.1$ (т.е. для хорошей сходимости) при $N \geqslant 18$ матрица решаемой системы становится плохо

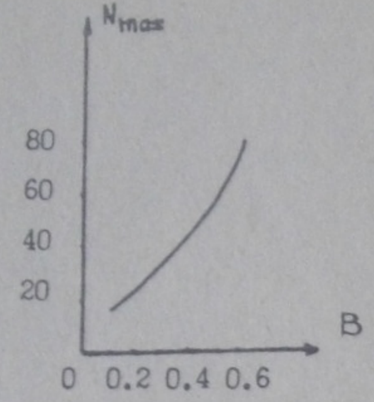


Рис.5 а. Зависимость максимального числа решаемых уравнений в зависимости от B.

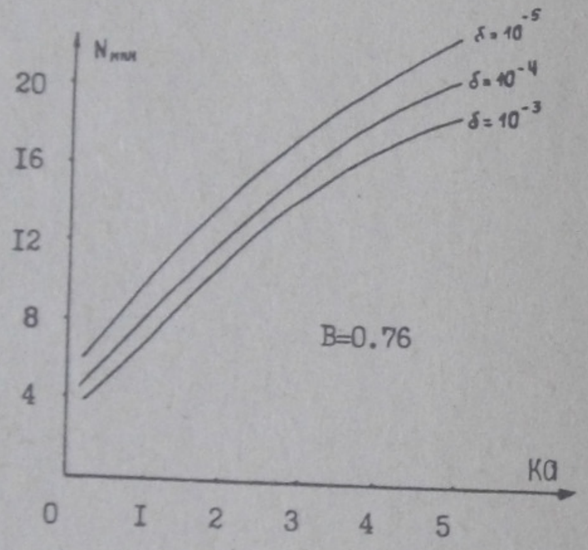


Рис.5 б. Зависимость минимального числа членов от относительного периметра цилиндра при расчете полей с заданной точностью.

обусловленной.

В качестве примера на рис. 5б приводятся зависимости минимально необходимого числа N_{min} при $B=0.76$ для различных точностей счета δ. Видим, что графики при малых значениях ka почти линейные и, например, для $\delta=10^{-4}$ можно использовать эмпирическую формулу $N=integer\{4ka+4\}$, которая использовалась при расчетах полей периодических структур из проводящих цилиндров. Сходимость результатов счета с увеличением точек коллокаций к своим предельным значениям для случая решетки из эллиптических цилиндров при различных значениях коэффициента сжатия эллипса $V=b/a$ (где a и b - большая и малая полуоси эллипса соответственно) и различных значениях коэффициента $B=a_0/a$ приводится на рис. 6 при $D=0.5$, $G=0.5$. Вспомогательный контур подобен основному, т.е. эллиптический. D и G - относительный период и коэффициент заполнения решетки соответственно.

Отметим, что такие же картины получены для сходимости напряженности поля в ближней зоне.

Из рисунков видно, что сходимость результатов при больших значениях $B\approx 1$ (точнее, при B, обеспечивающих сходимость) имеет одинаковый характер при всех V. Однако, для каждого значения коэффициента сжатия существует такое значение B_0, что при $B<B_0$ результаты расходятся.

С физической точки зрения полученные результаты можно объяснить следующим образом. Переизлученное поле от краев эллиптического цилиндра является расходящимся с центрами в окрестности фокусов основного эллипса. Отсюда следует, что выражение для рассеянного поля должно иметь особенности в нефизической области, вблизи фокусов эллипса. На рис. 7 изображена картина линий равных амплитуд электрического поля в области между решеткой и диэ-

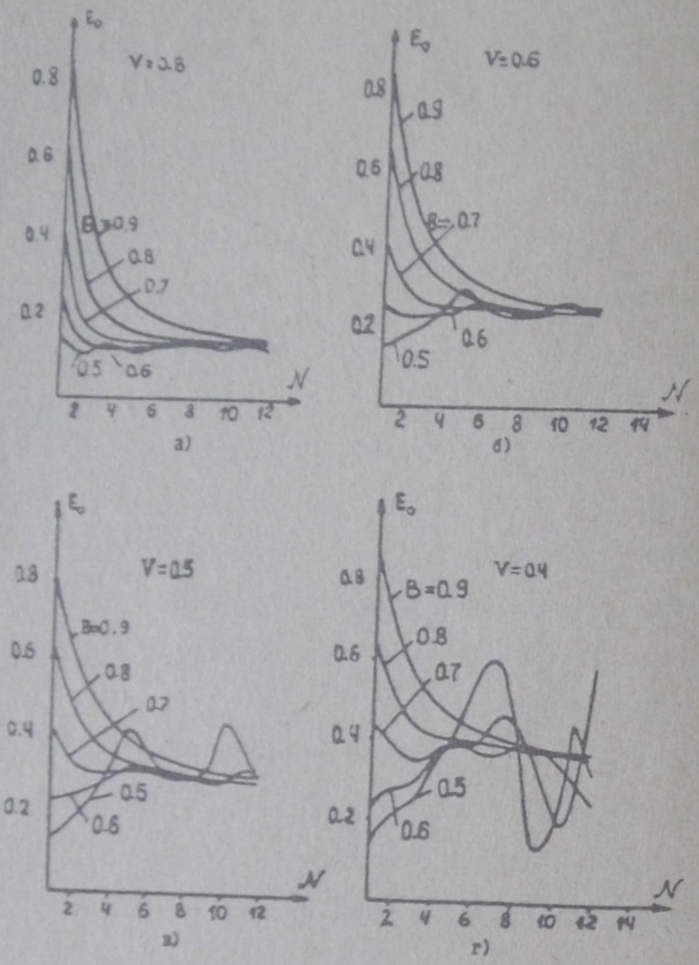


Рис.6. Сходимость результатов счета для различных значений коэффициентов сжатия.

лектриком для случая, когда элементы решетки имеют эллиптическое сечение ($V=0$ и $d=45°$). Вспомогательный контур проходит непосредственно через фокусы основного эллиптического контура.

В отличие от случаев искусственного зануления значений поля внутри цилиндра (в нефизической области), в данном случае рассчитывались значения функции, определяющие поле и во внутренней области. Из рисунка отчетливо видно, что поле вблизи фокусов эллипса принимает большие значения и приближенно отображает вышеописанную особенность рассеянного поля. Такую особенность могут создать вспомогательные источники, расположенные на дуге, которая проходит между фокусом (центром кривизны) и поверхностью с минимальным радиусом кривизны.

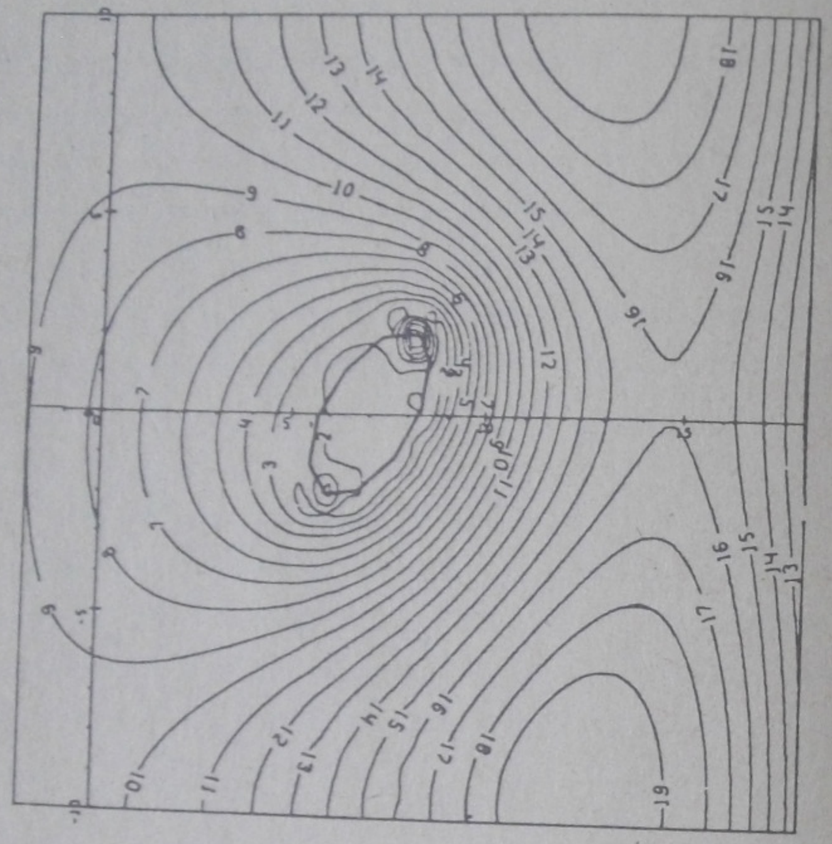
Из сказанного вытекает, что рассеянное поле, равное падающему полю на поверхности тела (в силу выполнения граничного условия) аналитически продолженное внутрь основного контура должно иметь особенность где-то вблизи центра его кривизны. Вероятно этот вывод можно связать с известной "гипотезой Рэлея". Этому же последнему условию должно удовлетворять и наше представление решения

$$\tilde{u} = \sum_{n=0}^{N} a_n H_0^{(1)}(kr_n) \qquad (21)$$

так как в противном случае не существуют такие a_n, при которых удовлетворяется граничное условие.

Последнее выражение будет иметь особенность на самом вспомогательном контуре или внутри него и выражение поля вида (21) не способно создать особенность вне контура.

В предельном случае вырождения эллипса в полоску указанная особенность известна под названием "условия на ребре". Для случая эллиптической поверхности, естественно, это условие менее выражено и при использовании метода вспомогательных источников для



V = 0.6, $\alpha = 45°$

Рис. 7. Картина линий равных амплитуд в случае решетки из цилиндров эллиптического сечения.

расчета полей, учитывая указанную особенность в нефизической области можно добиться наилучшей сходимости и минимизации машинного времени.

Следовательно правомерность выбора вспомогательного контура обусловлена тем, чтобы он "захватывал" или, лучше, проходил через центр кривизны основного контура. Тем самым выражение (2I) будет удовлетворять и последнему условию. Исследование граничных условий при этом показывает, что наибольшее отклонение полного поля от нулевых значений между точками коллокаций имеет место именно в областях контура с максимальной кривизной. Итак, если область, ограниченная вспомогательным контуром, содержит в себе внутренние центры кривизны или они находятся на контуре, то с увеличением N результаты расчетов монотонно стремятся к своему предельному значению и сходимость не нарушается. Когда же центры кризизны находятся вне вспомогательного контура, результаты расчета расходятся и с увеличением числа *N* усиливается осцилляция значения поля.

Вышеприведенный вывод согласуется с результатами работ [I5, I6,I7] , в которых исследуются аналитические свойства поля, рассеянного цилиндром.

6. Учет сложности падающего поля.

Итак, выше рассмотрены случаи, когда сложность рассеянного поля вызвана сложностью поверхности тела. Однако, особенности рассеянного поля могут возникнуть и по причине падающего поля, и в некоторых случаях, даже простых (круговых) тел рассеянное поле может иметь особенность вблизи отражающей поверхности внутри нее. Если не учитывать эту особенность, расчет результатов методом вспомогательных источников может усложниться неправильным выбором

вспомогательного контура. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Число N одновременно определяет число точек коллокаций и число членов в представлении рассеянного поля. Точки коллокаций, поточечно сшивая падающее на систему и рассеянное ею поле, аппроксимируют основной контур и поэтому должно существовать минимальное значение $N = N_{min}$, с заданной точностью воссоздающее контур по указанным точкам. Следовательно, с одной стороны N_{min} определяется характером контура, а с другой стороны, число членов в разложении поля должно быть достаточно, чтобы описывать рассеянное поле. В последнем случае число N_{min} будет определяться сложностью рассеянного поля.

В простейших случаях, когда контур, например, круговой и падающая волна плоская, эти значения могут совпадать, однако это не является обязательным условием.

Представляет интерес исследование задачи о двух цилиндрических источниках (светящихся линий, поле которых есть $H_0^{(1)}(kr)$), расположенных с диаметрально противоположных сторон на расстоянии I.5a и 2a от уединенного цилиндра (см. рис.8). Рассеянное цилиндром поле сложное, поэтому сходимость ухудшается и тебуется увеличение N.

Как и прежде, сходимость расчета исследовалась при различных B. На рис. 8а и б приводится картина стремления рассеянного поля к своим предельным значениям с увеличением N при различных значениях расстояния источников внешнего поля от цилиндрической поверхности $|kx| = 0.5ka$ и $|kx| = 1.0\,ka$. Можно заметить, что с приближением вспомогательных источников к поверхности основного контура сходимость становится более регулярной. Из рис.8а следует, что оптимальным является значение $B = 0.6$.

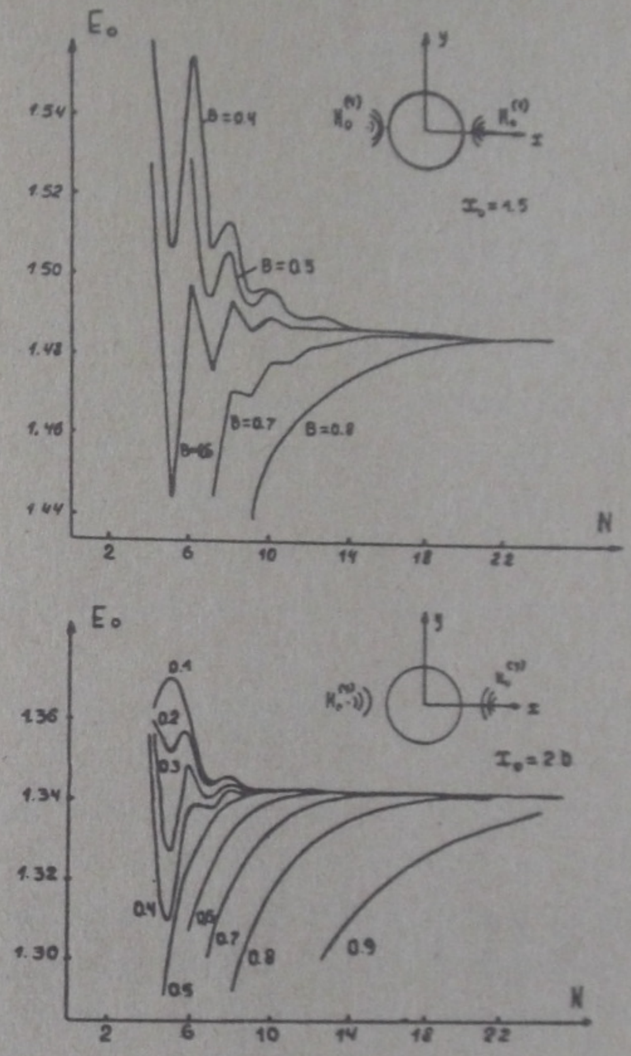


Рис. 8 а, б. Сходимость результатов при падении двух цилиндрических волн на одиночный цилиндр круглого сечения.

Заметим, что для B, обеспечивающих регулярную сходимость в обоих приведенных случаях скорость сходимости одинаковая. Так, например, при $B=0.8$ для фиксированного значения N относительная погрешность в обоих случаях одинаковая.

Приведенные графики показывают, что для выбора оптимального вспомогательного контура, нужного для удовлетворительной сходимости, необходимо учесть сложность рассеянного поля, вызванного сложностью падающего поля.

Таким образом, можно сделать вывод, что как и в предыдущем параграфе в случае эллиптических цилиндров, когда при выборе вспомогательного контура необходимо было учесть особенность рассеянного поля в нефизической области внутри цилиндра из-за сложности контура рассеивающего тела, в случае сложного характера падающего поля необходимо также учесть особенности рассеянного поля в той же области.

Наличие таких особенностей, являющихся как бы центрами рассеянного поля, очевидно.

Для примера на рис. 9 приводятся картины линий равных амплитуд в задаче о дифракции плоской электромагнитной волны на одиночном цилиндре круглого сечения, относительный периметр которого $ka=1$.

Картины а,б отличаются тем, что расчеты проводились при B = 0.2, 0.5 и соответственно (как и в случае рис. 7) поле во внутренней области не зануляется. Отчетливо прослеживается характер поля во внутренней области, рассчитанного по тем же выражениям для поля, которые определяют поле вне цилиндра.

Отметим, что в приведенных случаях численные значения поля в точках внешней области цилиндра совпадают с большой точностью. Нумерация уровней равных амплитуд графопостроителем определяется максимальным значением поля в рассчитанной области и, так как

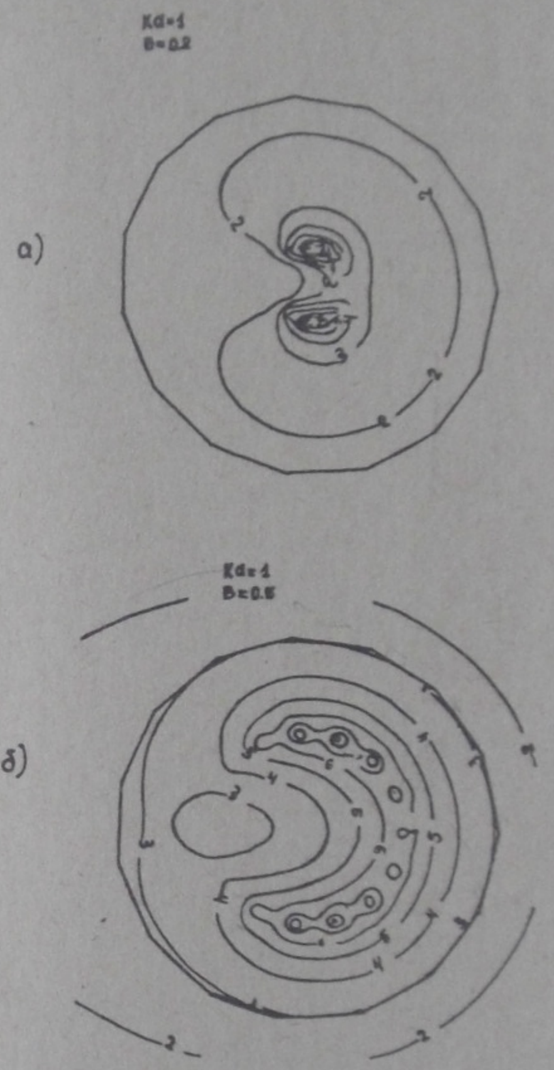


Рис. 9. Картины линий равных амплитуд в "нефизичной" области внутри проводящего цилиндра.

внутри цилиндра, в нефизической области в первом случае максимальное значение поля весьма большое, то во внешней области эти линии не проводятся.

Несмотря на, казалось бы, различный характер поля, можно заметить существенные общие свойства.

I. Амплитуда поля внутри цилиндра со стороны падающего поля (на рисунке справа) принимает большее значение, чем на противоположной стороне, и поэтому модуль комплексных коэффициентов, соответствующих вспомогательным источникам в теневой части (слева), весьма мал. Кстати, это означает, что в указанной части можно взять меньшее число вспомогательных источников.

2. Единственность рассеянного поля вне цилиндра определяет общий характер поля во внутренней области. Так, например, 2-й уровень на рис. 9а и 4-й уровень на рис. 9б почти не отличаются. В области расположения вспомогательных источников поля отличаются, что вполне понятно.

На рис. I0 приводятся картины линий равных амплитуд при дифракции цилиндрических волн типа $H_0^{(1)}(kr)$ на металлическом цилиндре круглого сечения (соответствующие рис. 8а,б). В отличии от падения плоской волны, в нефизичной области можно заметить два ярко выраженных изображения реальных источников падающей волны.

Переизлученное поле тем же цилиндром во втором случае имеет особенности в точках изображения нитевидных источников и с приближением к цилиндру извне изображение тоже приближается к основному контуру. По этой причине оптимальным становится большее значение B, при котором вспомогательные источники ближе к основному контуру.

Результаты, приведенные в предыдущих параграфах, показывают, что в случае бесконечной решетки из цилиндров даже круглого се-

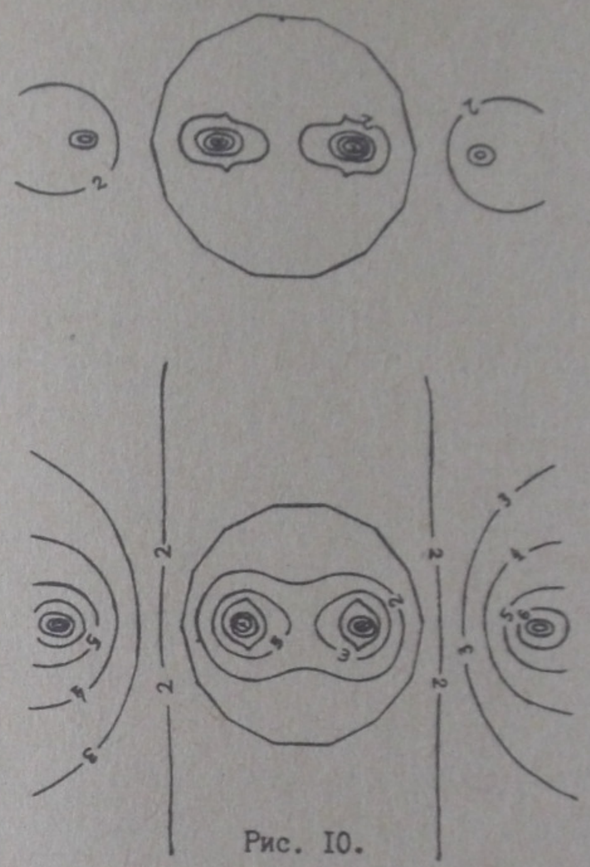


Рис. I0.

Картина ближнего электрического поля вне и внутри (аналитическое продолжение во внутрь) проводящего цилиндра круглого сечения при облучении близко, радиально противоположно расположенными цилиндрическими источниками от поверхности цилиндра а) на расстоянии, равном половине радиуса цилиндра б) на расстоянии, равном радиусу цилиндра. Внутри цилиндра отчетливо видны центры(каустики) расходящейся внешней волны.

чения рассеянное каждым цилиндром поле будет достаточно сложным и эта сложность определяет остро выраженное оптимальное значение $B = 0.76$. Из рассмотренных примеров следует, что при решении задач дифракции методом вспомогательных источников для наилучшей сходимости результатов расчета особенности рассеянного поля необходимо расположить на кривой, расположение которой в каждой конкретно поставленной задаче можно интуитивно предугадать.

Для исследования точности выполнения граничных условий на поверхности цилиндра при различных параметрах системы были рассчитаны значения полного поля вдоль его контура с достаточно мелким шагом. Расчеты показали, что граничные условия, т.е. равенство нулю суммарного поля в точках коллокации, удовлетворяются всюду. Кроме того, значения полного поля на контуре со стороны падающей волны с машинной точностью также равны нулю. Отклонения от нулевого значения в области между точками коллокаций начинаются в обращенной к диэлектрику части цилиндра.

Это, вероятно, можно объяснить тем, что ближнее поле принимает большое значение именно в области, заключенной между диэлектриком и решеткой.

Анализ результатов показал, что порядок отклонения поля на контуре от нуля равен порядку, в котором стабилизируются поля в ближней и дальней зонах, что связано с зависимостью точности счета электрического поля от точности выполнения граничных условий.

Для увеличения точности счета при меньших N желательно увеличить число точек коллокаций в тех местах основного контура, где ожидаются большие значения поля (где меньше радиус кривизны).

7. Сходимость результатов расчета при решении внутренних задач.

Численные расчеты собственных чисел и собственных значений также показали, что относительная погрешность резко уменьшается с удалением центров вспомогательных источников от поверхности основного контура (т.е. с удалением вспомогательного контура от основного).

На рис. II приводятся результаты численного эксперимента по проверке сходимости расчетных значений поля с изменением расстояния центров особенностей от основного контура.

На оси абсцисс отложено относительное удаление kd от поверхности вдоль нормали в каждой точке.

Приводится зависимость необходимого числа членов разложения от относительного расстояния между точкой коллокаций и центром источника вдоль нормали для расчета собственного значения фиксированного контура с указанной на рисунке точностью. Можно заметить, что с приближением центров особенностей к контуру резко возрастает число необходимых членов. Приведенное семейство кривых показывает, что при решении поставленной задачи методом сингулярных интегральных уравнений, т.е. когда контур интегрирования является основным контуром число разбиений резко увеличивается, поэтому резко возрастает время счета.

Итак, с удалением вспомогательного контура уменьшается число необходимых членов, точек коллокаций и резко уменьшается время машинного счета.

Однако, на возможное увеличение расстояния между основным и вспомогательным контуром, как и в случае задач дифракции, налагает ограничение минимальный радиус кривизны основного контура.

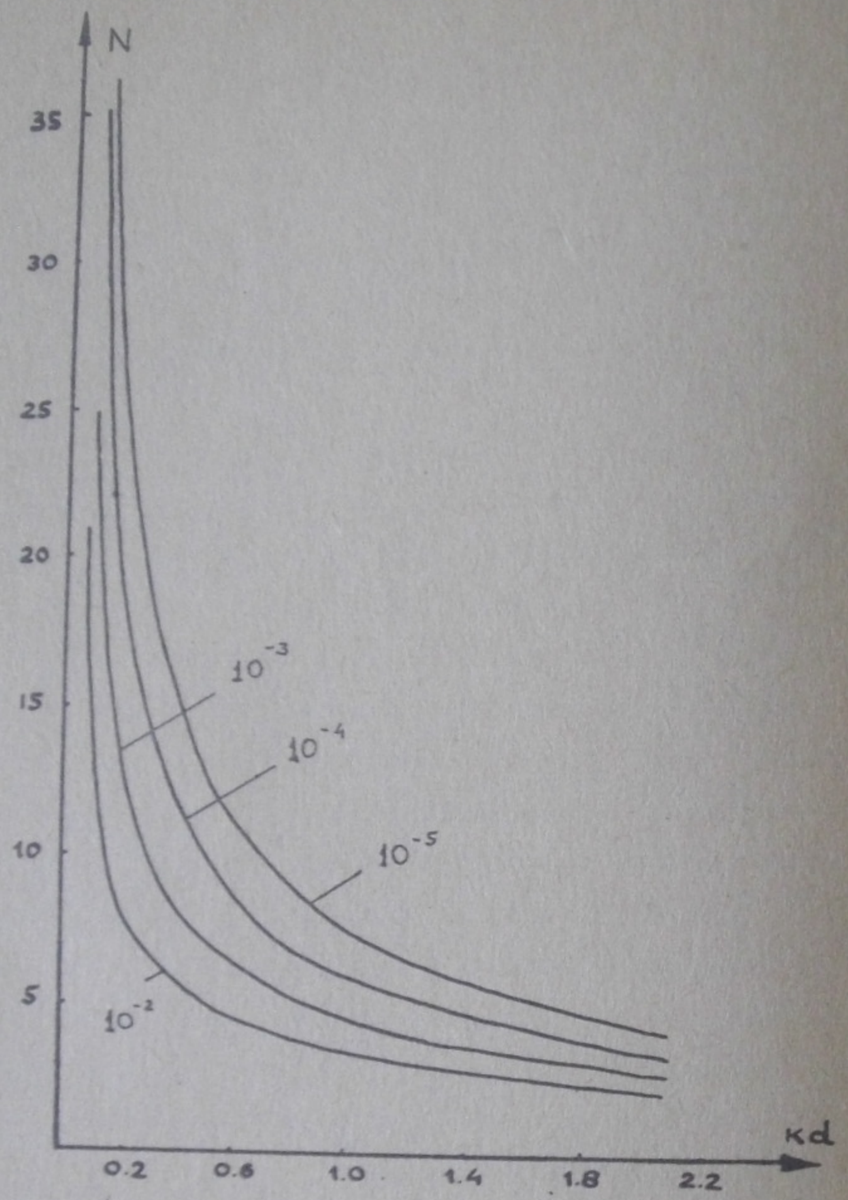


Рис.II Зависимость необходимого числа точек коллокаций от относительного "расстояния" между контурами для различных значений точности расчета собственных чисел волновода типа "Кассини"

На рис. I2 приводятся характерные графики расчета собственной длины волны полой области, ограниченной овалом Кассини с уравнением в параметрическом виде

$$\rho^2 = c^2\cos 2\varphi + \sqrt{c^4\cos^2 2\varphi - (a^4 - c^4)}$$

(параметры контура подобраны таким образом, что минимальный радиус кривизны $R_{min} = 0.38\rho_{max}$, $c = 0.58\rho_{max}$, $a^2 + c^2 = 1$, $\rho_{max} = 1$) при различных значениях удаления точек особенностей функций Ханкеля от основного контура вдоль нормалей kd. Можно заметить, что монотонная сходимость (стремление найденных значений к истинному) наблюдается только при расстояниях, меньших минимального радиуса кривизны R_{min}.

Итак, с увеличением величины kd имеем улучшение скорости сходимости и резкое уменьшение необходимого числа членов для счета с большой точностью.

Именно этот факт позволяет определить собственные значения и собственные функции низших и высших типов волн почти с одинаковой точностью. В таблице приводятся расчетные значения собственных чисел магнитных волн круговой области, которые рассчитаны при одном и том же значении kd. Там же даны относительные погрешности расчетных значений при $N=7$ в сравнении с точными табличными из справочника. Можно заметить, что от номера собственного числа точность счета существенно не зависит.

Последний столбец по порядку убывания значения критической длины волны соответствует 20-му типу. Значит, при расчете высших волн практически не приходится повышать точность счета и этим особенно удобен предложенный метод расчета собственных чисел.

Надо отметить, что этим методом значительно проще рассчитываются и собственные поля. Так, для примера на рис. I3 даются картины

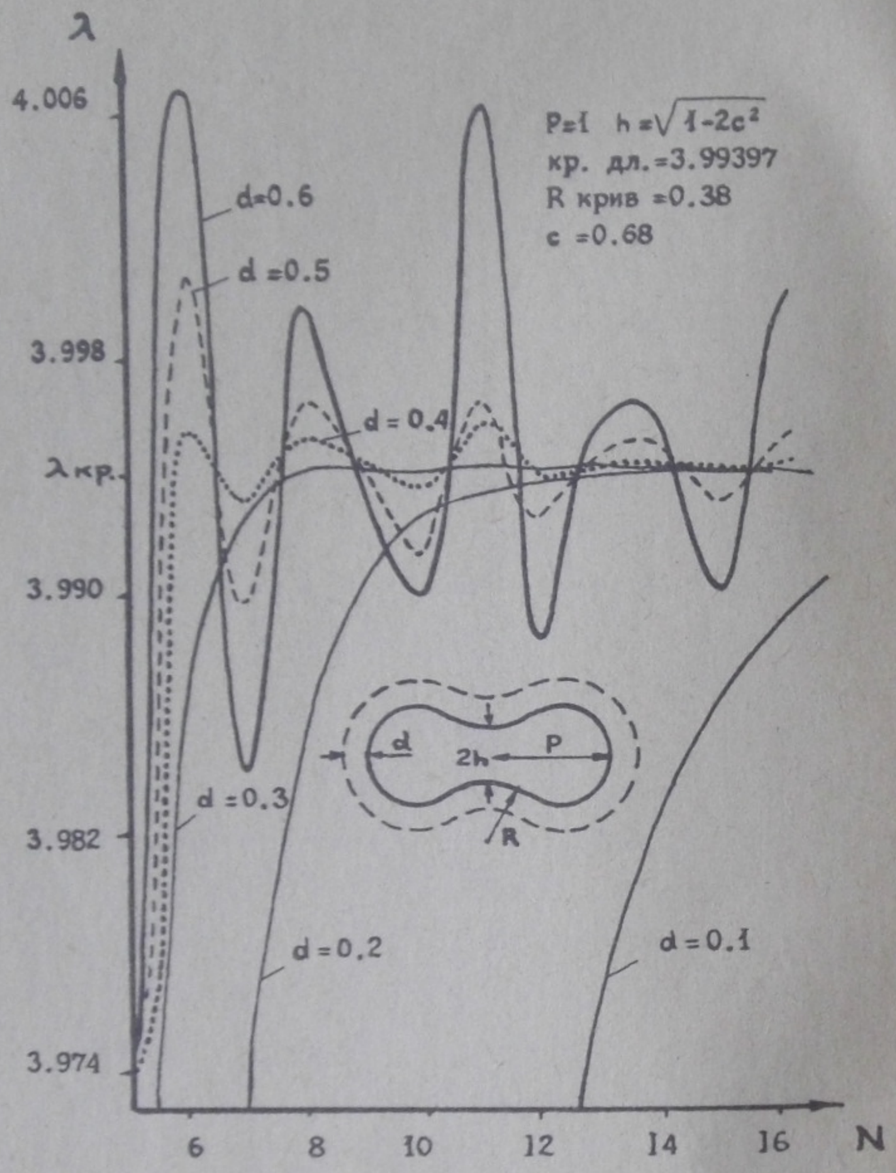


Рис.I2 Характер сходимости результатов расчета критической длины волны для полой области, ограниченной овалом Кассини

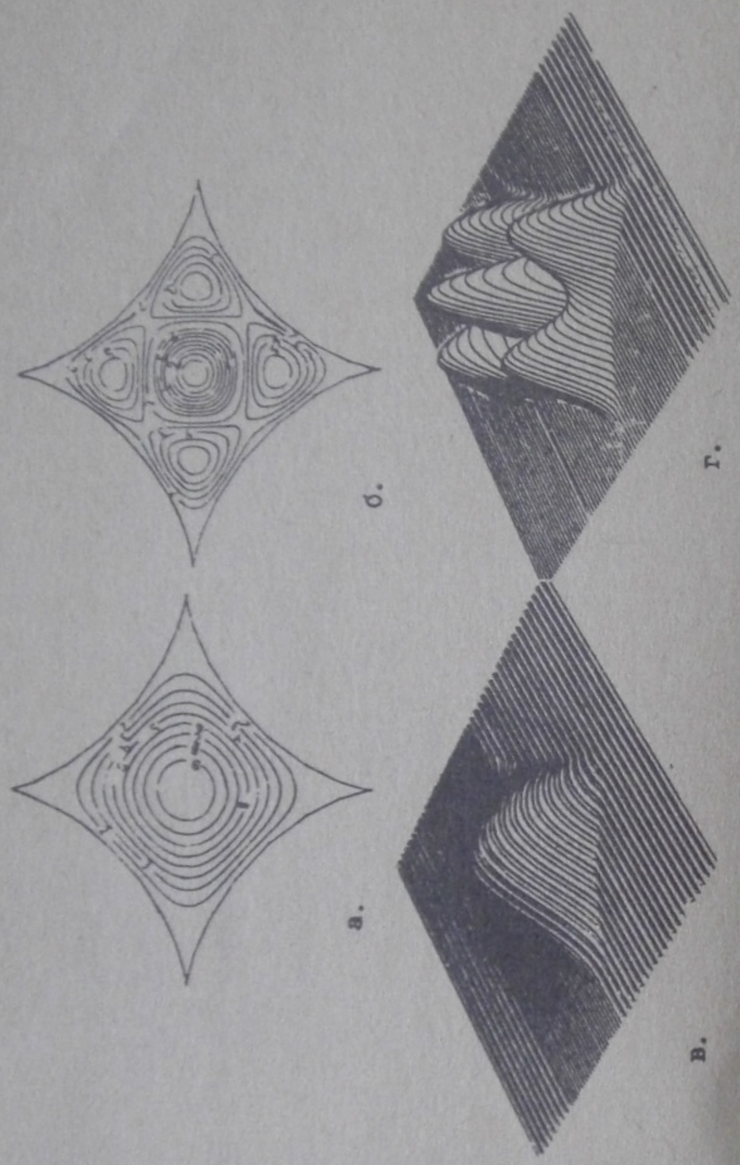
ТАБЛИЦА I

N	H_{11}	H_{31}	H_{12}	H_{03}	H_{43}
4.	3.434I4887	I.53I60908	I.I9780825		0.46554975
5.	3.42086895	I.50730266	I.I8428070		0.46244838
6.	3.4I553839	I.49957352	I.I8037335	0.6I547425	0.45764899
7.	3.4I362744	I.4968787I	I.I79I0904	0.6I743208	0.45I23503
8.	3.4I29459I	I.4960I098	I.I787II76	0.6I76I820	0.44925703
9.	3.4I266654	I.4956867I	I.I7858729	0.6I76095I	0.449I6934
I0.	3.4I26II97	I.49564626	I.I7854063	0.6I760775	0.449I9I94
II.	3.4I260340	I.49559920	I.I7852359	0.6I760725	0.44920555
I2.	3.4I257766	I.49557797	I.I785I794	0.6I760606	0.4492I047
I3.	3.4I258494	I.49557502	I.I785I602	0.6I760479	0.4492II60
I4.	3.4I258I32	I.49557388	I.I785I535	0.6I760499	0.4492II5I
I5.	3.4I257996	I.4955734I	I.I785I5I3	0.6I760504	0.4492I204
I6.	3.4I257909	I.49557323			
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$	3×10^{-4}	8.6×10^{-4}	$I.3\times10^{-3}$	$I.8\times10^{-3}$	2.2×10^{-3}

собственных полей гипоциклоидальной области в изометрии, рассчитанные за I-2 мин. машинного времени.

8. Вспомогательная функция для внутренних задач.

При решении внутренних задач описанным выше методом необходимо введение вспомогательной функции $f(x,y)$. Требования, предъявляемые к этой функции, определяются из постановки задачи и ее физического смысла. Основным требованием является то, что эта функция должна быть решением соответствующего задаче уравнения Гельмгольца и не должна иметь особенностей в основной области.



а. б. в. г.

Рис. I3. Линии равных амплитуд и рельеф продольной составляющей электрического поля в гипоциклоидальном волноводе: λ_a=I.9355; λ_σ=0.8275.

С физической точки зрения эта вспомогательная функция имеет смысл возбудителя исследуемой резонансной системы и поэтому местоположение источника (если таковой существует) вне основной области не имеет существенного значения. Численные эксперименты показали, что для нахождения собственных чисел и в случае сложных видов симметрии можно использовать выражение для плоской волны.

Однако, если решение поставленной краевой задачи является симметричным по отношению к какой-либо координатной оси, то введением симметричного вспомогательного контура и симметричных коэффициентов a_n можно резко сократить максимальный порядок решаемой системы уравнений и следовательно уменьшить время машинного счета. В таком случае необходимо выбрать вспомогательную функцию, которая отображает нужную симметрию искомого решения.

Так, например, если мы ищем решение, симметричное относительно оси y, наиболее удобны функции вида e^{ikx}. Если же решение ожидается симметричным или антисимметричным относительно обеих координатных осей более удобным является функция, взятая в виде четырех цилиндрических источников, симметрично расположенных на координатной плоскости. Соответствующим подбором коэффициентов при этих источниках всегда можно добиться симметрии функции $f(x,y)$.

Указанное требование существенно для точного расчета собственных полей. Дело в том, что максимальное значение во внутренней области значительно превосходит значение поля внешних источников на контуре, но все же неправильно подобранная вспомогательная функция возбудителя может внести некоторую погрешность в расчет собственных полей.

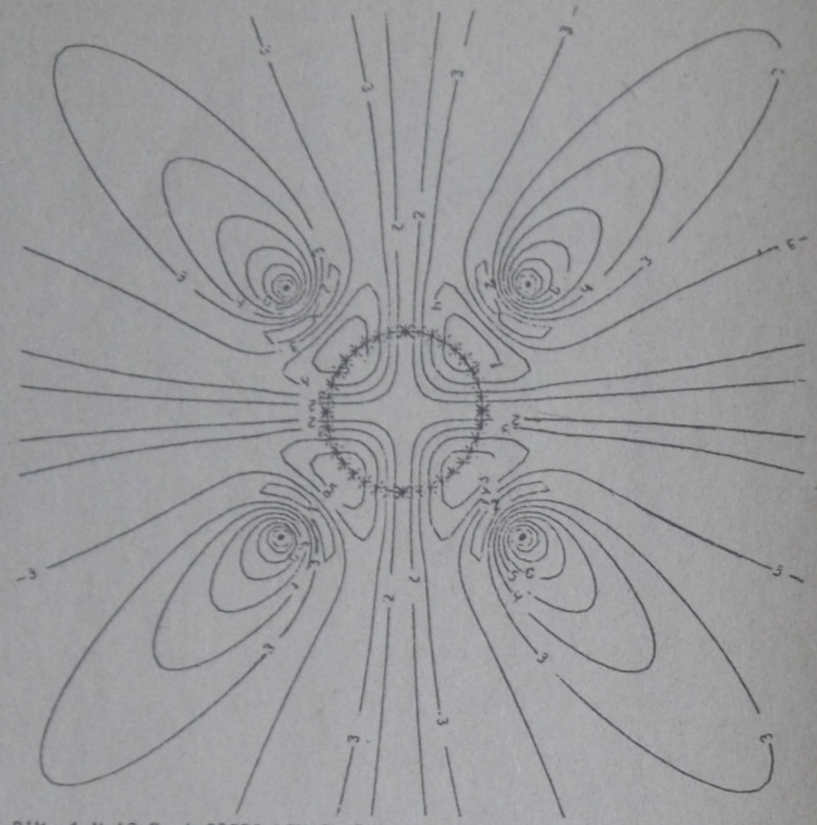


Рис. I4. Вспомогательная функция $f(x,y)$ в виде четырех цилиндрических источников, симметрично расположенных на координатной плоскости. Точками обозначено местоположение источников.

На рис. I4 приведены линии равных амплитуд электрического поля во всей области, когда ищется решение второй краевой задачи, т.е. собственное поле H-волн в круговой области. В приведенном случае граничные условия пишутся только на четверти окружности, число искомых коэффициентов вчетверо меньше и тем самым время счета значительно сокращается. На рисунке отчетливо видны поля цилиндрических источников.

9. Основные выводы и рекомендации по использованию метода вспомогательных источников.

Из вышеприведенных исследований по сходимости метода вспомогательных источников и из опыта решения большого количества конкретных задач можно сделать следующие выводы:

I. Метод коллокации является эффективным методом вычисления коэффициентов представления при правильном подборе вспомогательных параметров.

2. Исследования выпукло-вогнутых контуров показали, что для регулярной сходимости результатов расчета вспомогательный контур всегда необходимо выбирать с учетом особенностей рассеянного поля в нефизической области таким образом, чтобы контур содержал в себе отмеченные особенности. Иначе говоря, вспомогательный контур не должен отстоять от основного дальше радиуса кривизны контура (лучше, если проходит через центр кривизны основного контура). Физически это означает, что вспомогательные источники должны быть расположены вблизи центра расхождения волн.

3. При решении задач дифракции особенности рассеянного поля могут определяться не только сложностью поверхности тела рассеяния, но и сложностью падающего поля. В этом случае вспомогатель-

ный контур необходимо выбирать с учетом этих особенностей.

4. В случае регулярной сходимости результаты расчетов всегда стремятся к единственным и истинным значениям.

5. Решение неоднородной системы уравнений для расчета собственных чисел и собственных функций имеет четкий физический смысл, заключающийся в том, что резонансные свойства системы исследуются при наличии возбудителя.

6. Как показали исследования, зависимость сходимости результатов в широком интервале изменения параметров системы собственные функции и собственные числа всех типов волн определяются примерно с одинаковой точностью (см. таблицу).

7. Единственной программой решаются задачи дифракции и задачи расчета собственных функций и собственных значений. Это позволяет исследовать процесс формирования резонансных полей, которым соответствуют собственные функции.

8. Оптимизация вспомогательных параметров дала возможность создать гибкую, практически универсальную (с точки зрения широты спектра параметров исследуемой системы) программу, позволяющую успешно производить расчеты даже в сложных (например резонансных) случаях.

9. Методика решения задач проста для инженерных расчетов, требует малого машинного времени, а это дает возможность проведения большого количества численных экспериментов для оптимизации параметров электродинамической системы при конструировании устройств, а также для наглядного представления физических процессов.

IO. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ

I. Рассеянное поле диэлектрического тела, расположенного вблизи границы раздела сред.

В качестве примера использования выработанных рекомендаций по использованию метода вспомогательных источников решим задачу о дифракции поля цилиндрического источника на диэлектрическом цилиндре сложного сечения, погруженном в однородное полупространство с плоской границей раздела сред.

Специалистам известна сложность задачи возбуждения даже нитью тока плоской границы раздела двух сред. Вследствии того, что коэффициенты отражения и преломления границы раздела сред кроме других параметров зависят и от угла падения, выражение поля вблизи границы не удается записать в аналитическом виде и содержит несобственный интеграл. Дальнее поле вычисляется методом перевала.

Решим задачу о дифракции цилиндрической волны типа $H_0^{(1)}(kr_0)$ на диэлектрическом цилиндре с проницаемостью ε_1, расположенном параллельно границе раздела сред с диэлектрическими проницаемостями ε_2 и ε_3 соответственно.

Целью задачи будет исследование ближних полей системы. Заметим, что практически всегда существует конечная (ограниченная) область взаимодействия (взаимного влияния) границы раздела сред с телом рассеяния, который расположен вблизи границы. По этой причине используем следующий подход к решению поставленной задачи.

Будем искать решение задачи (выражения для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$) в каждой однородной области диэлектрической среды, используя метод вспомогательных источников. Далее методом коллокаций потребуем выполнения граничных условий полей в конечной части границы раздела в окрестности минимального расстояния от диэлектрического те-

ла. Увеличивая область выполнения граничных условий, замечаем, что ближнее поле в каждой точке будет стремиться к своему предельному значению. Тем самым найдем радиус эффективно взаимодействующей области границы раздела с телом рассеяния и решаемая задача будет эквивалентна задаче с бесконечной границей раздела сред. Только хорошая сходимость результатов расчета может дать возможность приближенно, но с заданной точностью рассчитать ближнее поле исследуемой системы. Поэтому важным вопросом является определение примерного расположения центров расхождения волн.

Для наглядности рассмотрим сперва решение задачи без наличия диэлектрического цилиндра (см. рис.I4а).

Предположим, что в точке $M(x_0, y_0)$ в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2 расположен источник цилиндрической волны. Пусть z -составляющая электрического вектора имеет вид $E_z = H_0^{(1)}(\kappa r_0)$ где $\kappa_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$, λ_2 - длина волны в этой среде, $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, x , y - координаты точки наблюдения.

Помимо непосредственно пришедшей волны в точку наблюдения приходит поле отраженной волны, выражение для которого нужно искать в виде поля вспомогательного источника, расположенного в точке зеркального изображения основного источника. Тогда будем иметь

$$E_z^{(2)} = H_0^{(1)}(\kappa_2 r_0) + A H_0^{(1)}(\kappa_2 r_0') ,$$

где A имеет смысл коэффициента отражения волны от границы раздела сред, r_0' - расстояние от точки зеркального изображения до точки наблюдения, $r_0' = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Найдем теперь примерное расположение центра расходящейся волны в другой среде, т.е. центра прошедшей, преломленной волны. Прошедшее поле в этой среде надо искать в виде $E_z^{(2)} = B H_0^{(1)}(\kappa_3 r_0'')$

где $\kappa_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3}$, λ_3 - длина волны в этой среде, B - коэффициент прохождения, r_0'' - расстояние от точки наблюдения в прошедшей области до центра расходящейся волны. Как известно, в результате преломления изображение источника смещается вдоль нормали от источника к границе раздела сред.

При этом величина смещения зависит от точки наблюдения, точнее от угла падения α луча, пришедшего в точку наблюдения, связанного известным из геометрической оптики соотношением. Поэтому x_0'' - координата искомой точки будет равна

$$x_0'' = x_0 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right)^2 \sin\alpha} .$$

Для простоты и так как нас интересует поле в ближней области границы раздела сред, при основании перпендикуляра от источника при $\alpha \to 0$ можно предположить, что $\alpha = 0$.

Тогда координата воображаемого вспомогательного источника во второй среде может быть взята $x_0'' = x_0 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$.

Далее, по составляющим электрического поля найдем выражения магнитного поля и из условий сшивания тангенциальных составляющих полей в какой-либо одной точке коллокации на границе раздела сред определим коэффициенты A и B .

Вполне очевидно, что существует наилучшая точка коллокации для получения точного (истинного) значения напряженности электрического поля в фиксированной точке наблюдения. Такая точка будет точка пересечения лучей на границе раздела сред, взятых на рис. В других точках значения полей будут рассчитываться с меньшей точностью.

Теперь усложним задачу и рассмотрим задачу при наличии диэлектрического цилиндра (см. рис.2а). В результате дифракции прошедшей волны во вторую область, погруженное диэлектрическое тело

станет источником новых волн, которые частично отражаются от границы раздела сред и частично пройдут в первую среду. Таким образом, переизлучателями волн являются контур сечения диэлектрического цилиндра ℓ и граница раздела сред L. Поэтому для определения z-составляющей электрического вектора Герца в каждой из выделенной сред выберем вспомогательные контуры ℓ_1 и ℓ_2, ℓ_2', ℓ_3 как показано на рис. 4б и расположим на них счетное множество точек - центров вспомогательных источников.

Будем искать z-составляющую электрического вектора Герца в каждой среде следующим образом:

I. Внутри тела источниками, расположенными на контуре ℓ_1,

2. В области 2 вне погруженного тела источниками на контурах ℓ_2 и ℓ_2'.

3. В области I источниками на контуре ℓ_3.

$$\Pi_1 = \sum_{n=1}^{N} a_n H_0^{(1)}(\kappa_1 r_n)\Big|_{\ell_1} ,$$

$$\Pi_2 = \sum_{n=1}^{N} B_n H_0^{(1)}(\kappa_2 r_{2n})\Big|_{\ell_2} + \sum_{m=1}^{M} B_m' H_0^{(1)}(\kappa_2 r_{2m}')\Big|_{\ell_2'} ,$$

$$\Pi_3 = \sum_{m=1}^{M} c_m H_0^{(1)}(\kappa_3 r_{3m})\Big|_{\ell_3} , \qquad \Pi_z = \frac{E_z}{\kappa^2 \varepsilon \mu} .$$

С использованием вышеприведенных формул находим составляющие электрического и магнитного полей и далее, для определения неизвестных коэффициентов расположение a_n, B_n, B_m', c_m пишем условия сшивания на границах раздела сред в конечном числе $N+M$ точек (методом коллокации):

$$\kappa_1^2 \Pi_1 = \kappa_2^2 \Pi_2 ,$$

$$\kappa \varepsilon_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial n_\ell} = \kappa \varepsilon_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial n_\ell} ,$$

$$\kappa_2^2 \Pi_2 = \kappa_3^2 \Pi_3 + E_z^0 ,$$

$$\kappa \varepsilon_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial n_L} = \kappa \varepsilon_3 \frac{\partial \Pi_3}{\partial n_L} + \frac{1}{\kappa_3 \kappa} \frac{\partial E_z^0}{\partial n_L} .$$

При этом, особо существенным становится вопрос радиуса сходимости результатов и оценка погрешности счета ближних полей в той или иной исследуемой области.

Сходимость рядов $\sum_{m=1}^{M} B_m' H_0^{(1)}(\kappa_2 r_3)$ и $\sum_{m=1}^{M} c_m H_0^{(1)}(\kappa_3 r_3)$ можно улучшить, расположив вспомогательные контуры ℓ_2' и ℓ_2 иным образом, т.е. так, чтобы для каждого центра-излучателя на контуре, описывающего поле в области (2), выполнялось условие (I) зеркального отображения от контура ℓ_2 и относительно границы L, а для излучателей, описывающих поле в области (I) - условие (2). Угол α примем равным нулю.

На рис. I4в показано расположение преобразованных таким образом контуров ℓ_2' и ℓ_3 при $\varepsilon_2 > \varepsilon_3$. Расчеты показали, что такое расположение обеспечивает достаточно быструю сходимость значения поля к своему предельному.

В качестве примера на рис. I5 приводится картина распределения поля в виде линий равных амплитуд.

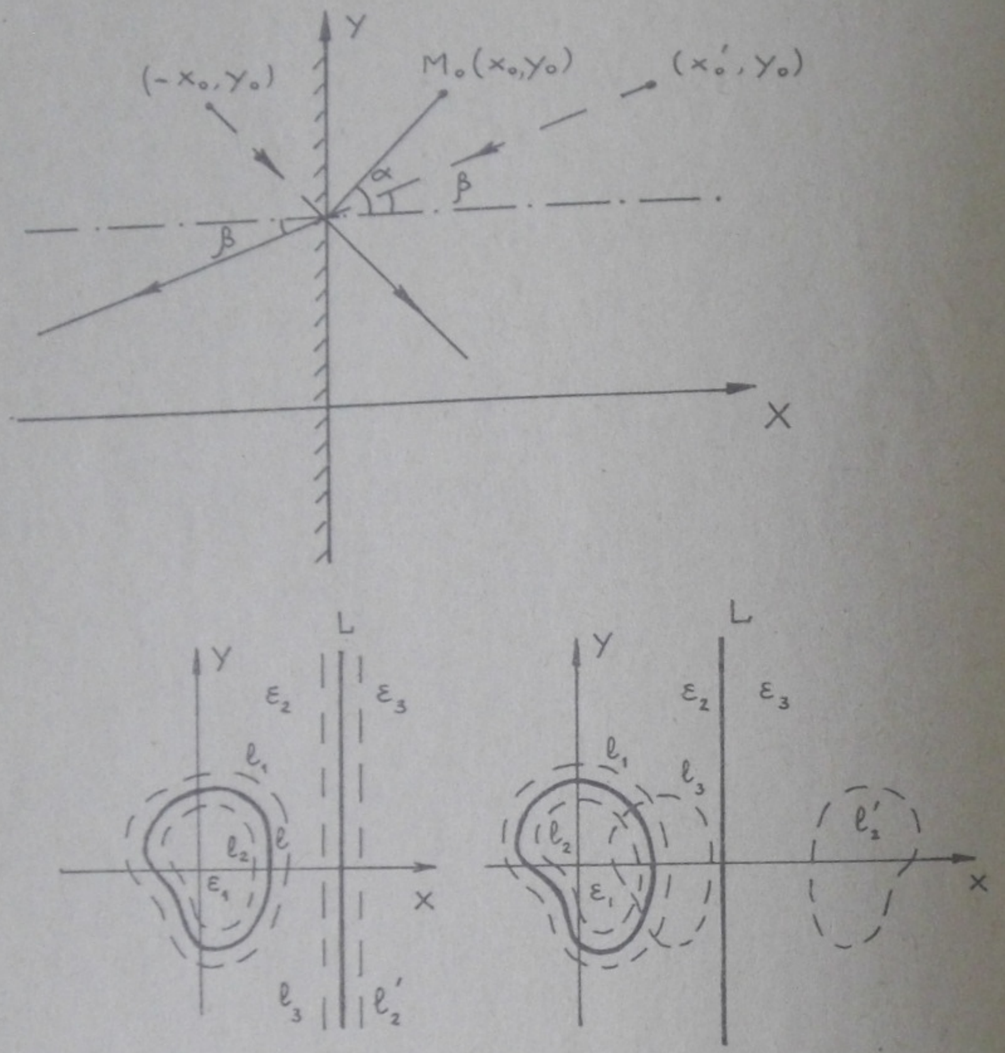


Рис.I5а. Выбор вспомогательных контуров методом "зеркального" изображения.

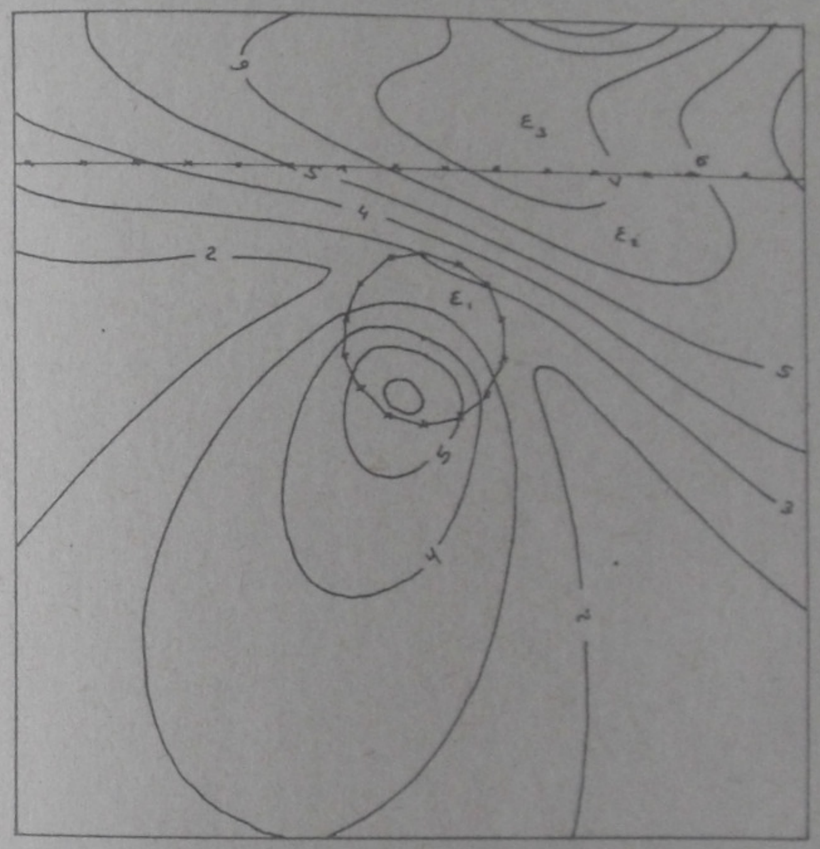


Рис. I5 б. Картина линий равных амплитуд напряженности электрического поля.

2. Продольно-регулярный диэлектрический волновод (Дисперсионное уравнение, собственные поля)

В качестве примера решения внутренней задачи приведем расчет характеристик диэлектрического волновода.

Пусть диэлектрический волновод представляет собой продольно-регулярный диэлектрический цилиндр с контуром поперечного сечения L и параметрами ε , $\mu=1$, помещенный в среду с параметрами $\varepsilon_0=1$, $\mu_0=1$.

Ось z декартовой системы координат xyz выберем параллельно образующим цилиндра. Тогда математическую задачу о нахождении собственных волн и исследования дисперсионных свойств данного диэлектрического волновода удобней (т.к. $\mu=\mu_0=1$) сформулировать в поперечных компонентах и в качестве потенциалов выбрать поперечные составляющие магнитного поля [I8] :

$$H_x(x,y,z,t) = H_x(x,y)e^{-i(\omega t - hz)}, \qquad (I)$$

$$H_y(x,y,z,t) = H_y(x,y)e^{-i(\omega t - hz)}. \qquad (2)$$

Вне диэлектрика $H_x^0(x,y)$ и $H_y^0(x,y)$ должны удовлетворять уравнению

$$\Delta H^0_{x,y} - (\kappa^2 - h^2)H^0_{x,y} = 0 , \qquad (3)$$

а в области, ограниченной поверхностью волновода $H_x(x,y)$ и $H_y(x,y)$ уравнению

$$\Delta H_{x,y} - (\kappa^2\varepsilon - h^2)H_{x,y} = 0 , \qquad (4)$$

где κ - волновое число в свободном пространстве; h - продольное волновое число.

Для обеспечения непрерывности тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границе раздела диэлектриков четыре скалярные функции $H^0_{x,y}$ и $H_{x,y}$ должны удовлетворять следующим граничным условиям

$$H_x(x_L,y_L) = H_x^0(x_L,y_L) , \qquad (5)$$

$$H_y(x_L,y_L) = H_y^0(x_L,y_L) , \qquad (6)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_x^0}{\partial x} + \frac{\partial H_y^0}{\partial y} \qquad M(x,y)\in L , \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial H_x^0}{\partial y} - \frac{\partial H_y^0}{\partial x} \qquad M(x,y)\in L . \qquad (8)$$

Таким образом, исходная задача о нахождении собственных волн и исследования дисперсионных свойств продольно-регулярного диэлектрического волновода сведена к математической проблеме отыскания пары чисел κ и h , для которых однородная краевая задача (3-8) имеет нетривиальные решения и соответствующего этой паре чисел распределения поля внутри и вне волновода.

Для решения поставленной краевой задачи (3-8) согласно методике, описанной в работе [II] строим два вспомогательных контура ℓ_0 и ℓ в плоскости XOY . Контур ℓ , целиком лежащий вне области, ограниченной контуром L , а контур ℓ внутри области. Каждая точка на контуре ℓ_0 удалена от основного контура L на одинаковое расстояние d_0 , в каждая точка на контуре ℓ удалена от L на расстоянии d .

Естественно d_0 и d ограничивает радиус кривизны основного контура и они выбраны из условия

$$d_0 < |R^-_{min}| , \qquad d < |R^+_{min}| ,$$

где $|R^{-}_{min}|$ - модуль минимального отрицательного радиуса кривизны основного контура; $|R^{+}_{min}|$ - минимальный положительный радиус кривизны основного контура. Далее, решение данной краевой задачи ищется в виде

$$H_x(x,y)=\int_\ell A(\ell)H_0^{(1)}(gr_\ell)d\ell - f_1(x,y)=u_x(x,y)-f_1(x,y), \quad (9)$$

$$H_y(x,y)=\int_\ell B(\ell)H_0^{(1)}(gr_\ell)d\ell - f_2(x,y)=u_y(x,y)-f_2(x,y), \quad (10)$$

$$H_x^\circ(x,y)=\int_{\ell_\circ} c(\ell_\circ)H_0^{(1)}(g_\circ r_{\ell_\circ})d\ell_\circ = u_{x_\circ}(x,y), \quad (11)$$

$$H_y^\circ(x,y)=\int_{\ell_\circ} D(\ell_\circ)H_0^{(1)}(g_\circ r_{\ell_\circ})d\ell_\circ = u_{y_\circ}(x,y), \quad (12)$$

где $g^2=\kappa^2\varepsilon-h^2$, $g_\circ^2=h^2-\kappa^2$, $A(\ell)$, $B(\ell)$, $C(\ell)$, $D(\ell)$ неизвестные плотности, определяющие составляющие магнитного поля в каждой однородной области; $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ - известные, непрерывные со своими производными, частные решения уравнения (3) внутри цилиндра.

Представление (9-12) искомого уравнения позволяет свести краевую задачу с однородными граничными условиями к эквивалентной ей краевой задаче с неоднородными граничными условиями:

$$u_x-u_x^\circ=f_1(x_L,y_L), \quad (13)$$

$$u_y-u_y^\circ=f_2(x_L,y_L), \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x-u_x^\circ)+\frac{\partial}{\partial y}(u_y-u_y^\circ)=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\varepsilon}u_x-u_x^\circ\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varepsilon}u_y-u_y^\circ\right]=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]. \quad (16)$$

В отличие от задачи (3-8) полученная краевая задача имеет отличные от нуля решения внутри контура ℓ для любой пары чисел h и κ (для непрерывных со своими производными f_1 и f_2). В виду единственности непрерывного решения Гельмгольца, удовлетворяющего на бесконечности условию излучения, это уравнение имеет вид

$$u_x(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y) & M(\kappa,h)\notin L \\ f_1(x,y)+H_{x\,совст} & M(\kappa,h)\in L \end{cases}$$

$$u_y(x,y)=\begin{cases} f_2(x,y) & M(\kappa,h)\notin L \\ f_2(x,y)+H_{y\,совст} & M(\kappa,h)\in L \end{cases}$$

$$u_x^\circ(x,y)=\begin{cases} 0 & M(\kappa,h)\notin L \\ H_{x\,совст}^\circ & M(\kappa,h)\in L \end{cases}$$

$$u_y^\circ(x,y)=\begin{cases} 0 & M(\kappa,h)\notin L \\ H_{y\,совст}^\circ & M(\kappa,h)\in L \end{cases}$$

где L - семейство кривых на плоскости $\kappa o h$, отображающих дисперсионное соотношение между волновыми числами κ и h, для которых краевая задача (3-8) имеет нетривиальные решения

$$H_{x\,совст},\ H_{y\,совст},\ H_{x\,совст}^\circ,\ H_{y\,совст}^\circ$$

Таким образом, если удается решить краевую задачу с граничными (13-16) для различных значений чисел κ и h и наблюдать внутри контура L за поведением функции

$$H_x(x,y)=u_x(x,y)-f_1(x,y), \quad (17)$$

$$H_y(x,y)=u_y(x,y)-f_2(x,y), \quad (18)$$

то обнаружится, что $H_x=H_y=0$, если $M(\kappa,h)\in L$ и $H_x=H_{x\,совст}$,

$H_y = H_{y\,соб}$, если $M(\kappa, h) \in L$. Последнее обстоятельство позволяет обнаружить не только собственные числа $h_{соб}$ и $\kappa_{соб}$, но и собственные поля заданного диэлектрического волновода.

Методом коллокации решение системы задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Найденные приближенные решения

$$\tilde{H}_x(x,y) = \sum_{n=1}^{N} a_n H_0^{(1)}(g r_n) - f_1(x,y), \qquad (19)$$

$$\tilde{H}_y(x,y) = \sum_{n=1}^{N} b_n H_0^{(1)}(g r_n) - f_2(x,y), \qquad (20)$$

обладают всеми вышеперечисленными свойствами. Вдали от точки $M(\kappa, h) \in L$

$$\tilde{H}_x \simeq \tilde{H}_y \simeq 0 \qquad (21)$$

По мере приближения к кривой L , H_x и H_y нарастают, достигая своего относительного максимума при $\kappa = \kappa_{соб}$, $h = h_{соб}$. Последние два утверждения выполняются тем точнее, чем больше N - число членов, сохраняемых в выражениях (19-20). Погрешность в поиске $\kappa_{соб}$ и $h_{соб}$ определяется стабильностью данного знака после запятой при изменении N , а для функции H_x , H_y H_x^0 и H_y^0 по величине среднеквадратичной погрешности, с которой удовлетворяются граничные условия.

Пояснения к графикам и таблицам

В таблицах 2,3,4 приведены значения коэффициентов замедления $u = h/\kappa$, $\kappa = 2\pi/\lambda$ всех распространяющихся типов волн регулярных ДВ с поперечным сечением эллиптической, прямоугольной и П-образной формы для девяти значений.

На рис. I6,I7 приведены дисперсионные кривые для диэлектрических волноводов указанной формы, где горизонтальными пунктирами обозначены границы изменения волнового числа κ ($\kappa\ell$ - в случае эллиптического волновода рис. I6).

На рис. I8,I9 приведены линии равных амплитуд z-составляющей векторов $\vec{E}$ (с левой стороны) и $\vec{H}$ (с правой стороны), показывающих распределение этих компонент в поперечной плоскости ДВ.

На прилагаемых чертежах даны распределения линий равных амплитуд первых 3-х типов волн E_z и H_z -составляющих в плоскости сечения волноводов.

Линии равных амплитуд перенумерованы цифрами от 2 до 9. Они соответствуют значениям, нормированным на максимум поля от 0.I до 0.9 шагом 0.I.

№/КВ	4.2097	3.508I	3.0070	2.63II	2.3387	2.I048	I.9I35	I.754I	I.6I9I
I	I.289	I.242	I.968	I.I53	I.II5	I.083	I.056	I.036	I.023
2	I.254	I.I97	I.I44	I.I00	I.066	I.04I	I.025	I.0I4	I.0074
3	I.I35	I.054	I.0027						
4	I.II2	I.029							
5	I.0024								

ТАБЛИЦА 2. Коэффициенты замедления собственных волн эллиптического волновода

№/КВ	4.2097	3.508I	3.0070	2.63II	2.3387	2.I048	I.9I35	I.754I	I.6I9I
I	I.302	I.256	I.2I3	I.I72	I.I39	I.I02	I.074	I.053	I.035
2	I.273	I.220	I.I69	I.I25	I.089	I.06I	I.040	I.025	I.0I5
3	I.I77	I.095	I.029						
4	I.I67	I.084	I.0I7						
5	I.033								

ТАБЛИЦА 3. Коэффициенты замедления собственных волн четырехугольного волновода

№/КВ	4.2097	3.508I	3.0070	2.63II	2.3387	2.I048	I.9I35	I.754I	I.6I9I
I	I.2I3	I.I7I	I.I32	I.I00	I.073	I.052	I.034	I.022	I.0II
2	I.I70	I.I29	I.090	I.062	I.046	I.026	I.0I5	I.0082	I.0043
3	I.I22	I.03I	I.003						
4	I.II8	I.045	I.00II						

ТАБЛИЦА 4. Коэффициенты замедления собственных волн П- образного волновода.

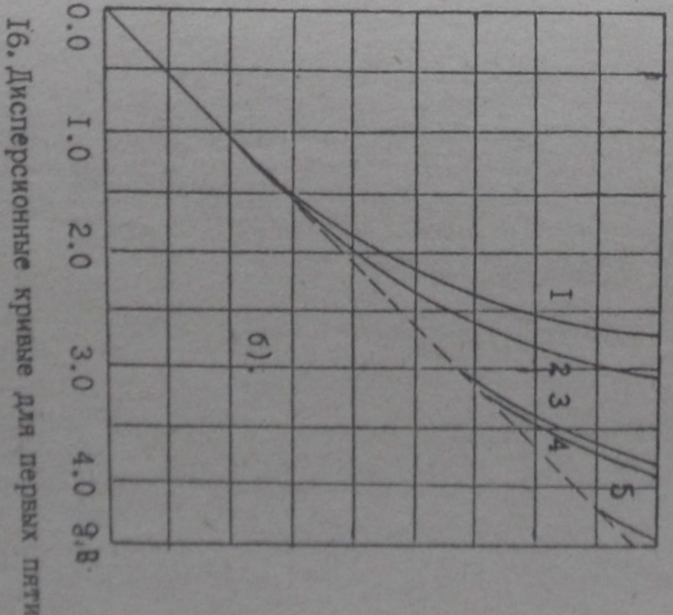


Рис. I6. Дисперсионные кривые для первых пяти типов волн эллиптического волновода $\varepsilon_1=1.1$ (а), $\varepsilon_1=2.08$(б), $A/B=0.5$, $d_1/B=0.5$, $d_2/B=0.24$, $N=6$.

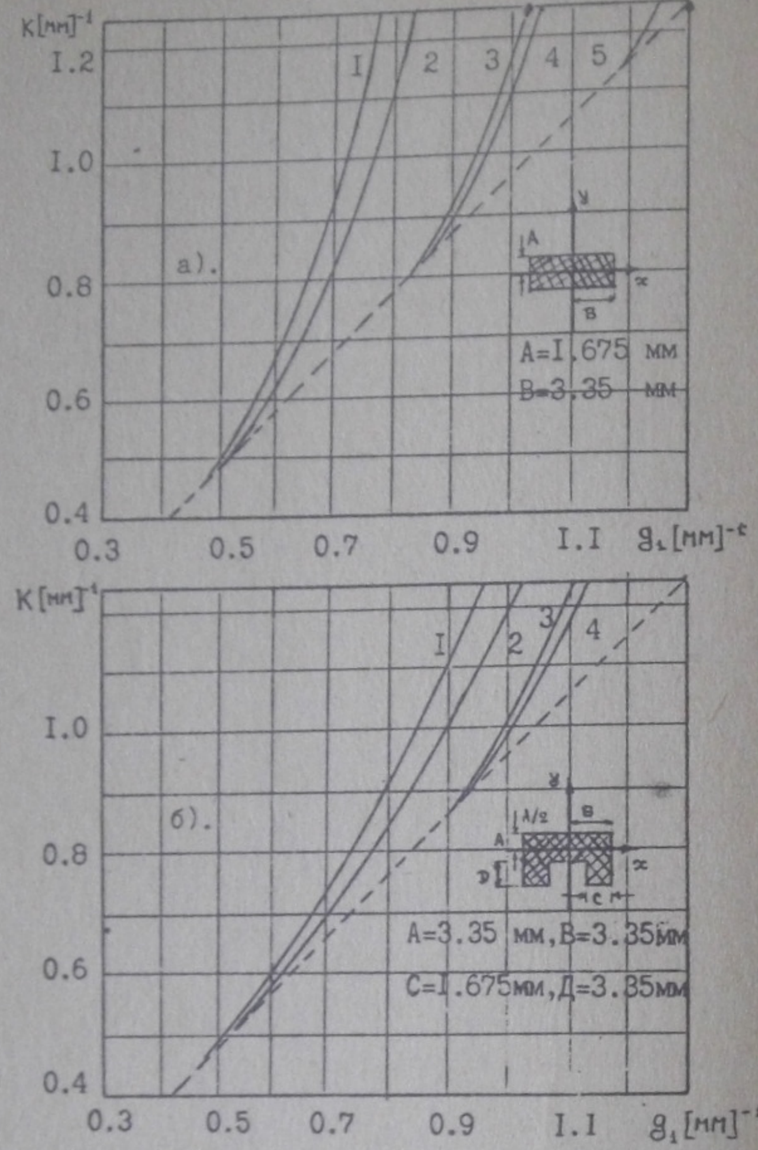


Рис. I7 Дисперсионные кривые для первых нескольких типов волн четырехугольного (а) и П-образного (б) волноводов.

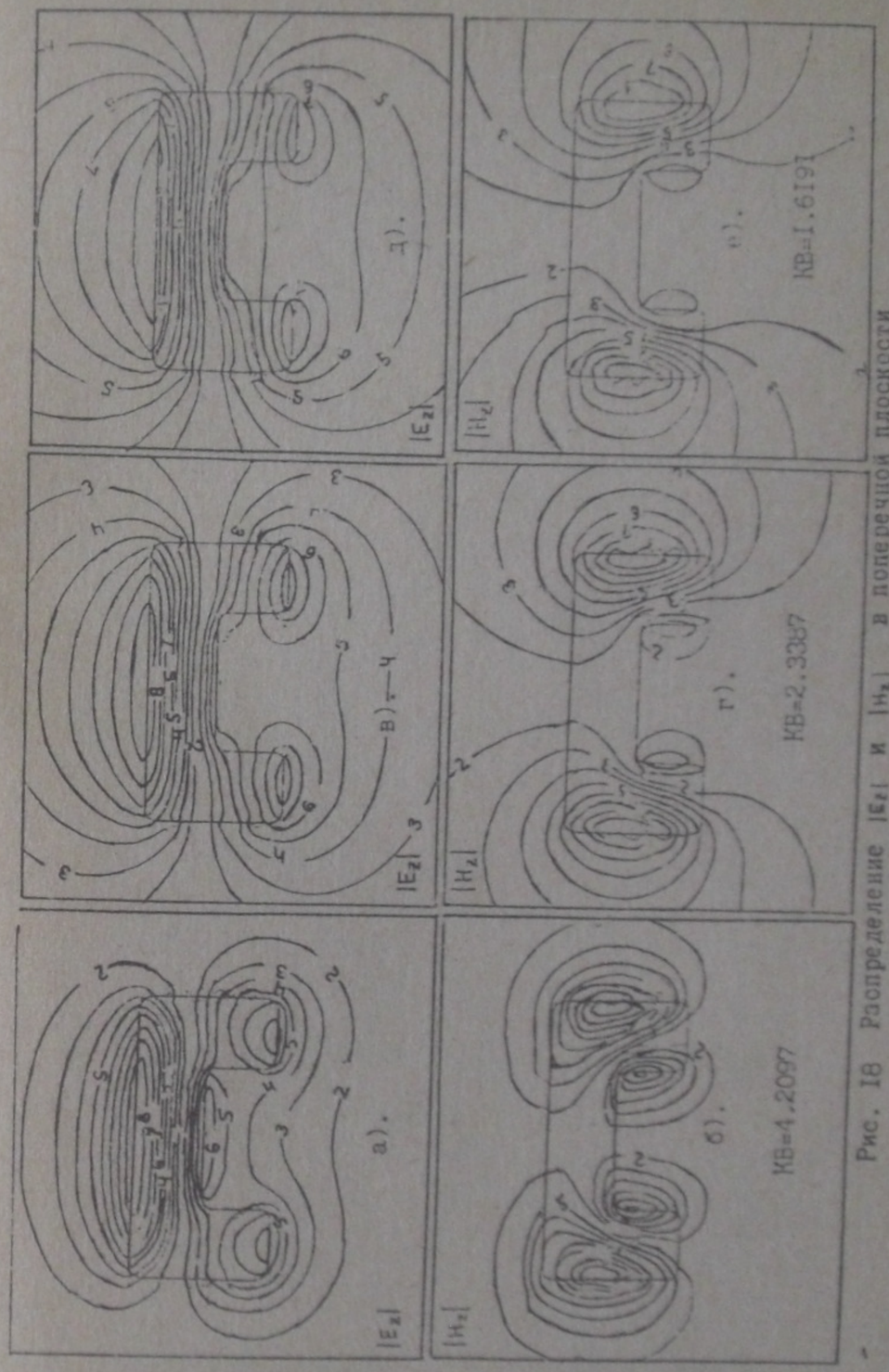


Рис. I8 Распределение $|E_z|$ и $|H_z|$ в поперечной плоскости П-образного волновода для первой основной волны

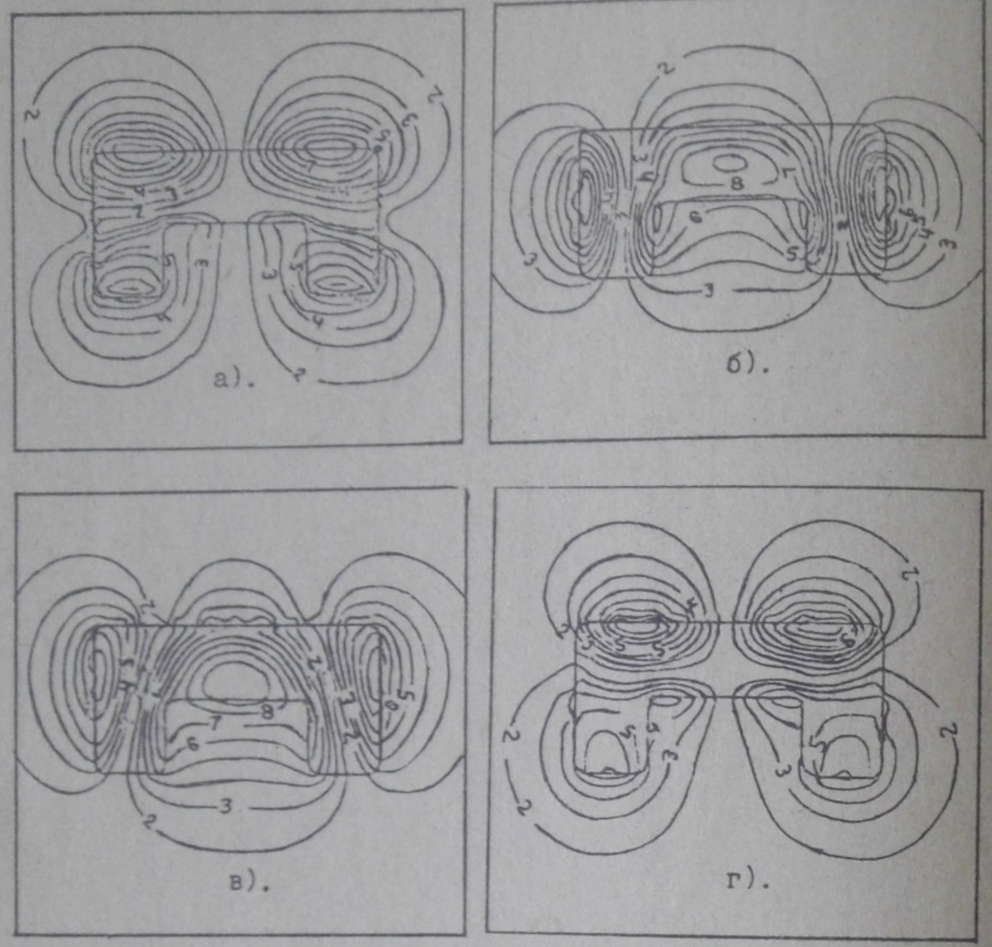


Рис. I9 Распределение $|E_z|$ и $|H_z|$ в поперечной плоскости П-образного волновода для 3-ей и 4-ой волны при КВ=4.2097, ξ =I.I22 (а,б), ξ =I.II8 (в,г).

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Купрадзе В.Д. О приближенном решении граничных задач электродинамики. I-я всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн. Паланга, I965г., с. 347-358.

2. Купрадзе В.Д. УМН, I967, 22, 2(I34), 59.

3. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М., Наука, I978, с. 35I.

4. Ильинский А.С., Ерёмин Ю.А. Труды ВЦ МГУ "Вычислительные методы и программирование", т. 32.

5. Свешников А.Г., Ерёмин Ю.А. Численное исследование задач дифракции на теле вращения методом неортогональных рядов.

6. Малакшинов Н.П., Ерихов В.Г., Якимов И.А. Решение задачи дифракции плоской волны на линейной решетке при помощи метода вспомогательных источников. Радиотехника и электроника, т.ХХУ, № 8, I980, с. I607-I6I4.

7. Малакшинов Н.П., Смагин А.С. Исследование регулярных волноводов произвольной формы методом вспомогательных источников. Радиотехника и электроника, т.ХХУП, № II, I982, с.2I27-2I33.

8. Поповиди Р.С., Цверикмазашвили З.С. Численное исследование задач дифракции модифицированным методом неортогональных рядов. ЖВМ и МФ, № 2, I977, с. 384-393.

9. Копалейшвили В.П., Поповиди Р.С., Цверикмазашвили З.С. Дифракция на решетке, составленной из дискретных элементов. Труды XIX научной конференции МФТИ, I973 г.

I0. Поповиди-Заридзе Р.С., Талаквадзе Г.М. Исследование резонансных свойств решеток из металлических цилиндров с диэлектрическим слоем конечной толщины. Радиотехника и электроника, № I, I984, с. 23-30.

II. Заридзе Р.С., Каркашадзе Д.Д., Хатиашвили Д.Ш., Ахвледиани Г.З. Приближенный метод расчета диэлектрических волноводов со сложным контуром поперечного сечения. Сообщения АН ГССР, I02, № I, I98I, с. 53-56.

I2. Поповиди-Заридзе Р.С., Каркашадзе Д.Д., Ахвледиани Г.З., Хатиашвили Д.Ш. Исследование возможностей метода вспомогательных источников при решении двумерных задач электродинамики. Радиотехника и электроника, № 2, I98I, с. 254-262.

I3. Копалейшвили В.П., Поповиди Р.С. Дифракция на телах бесконечной длины. Радиотехника и электроника, № 7, I972, с. I374- - I38I.

I4. Копалейшвили В.П., Поповиди Р.С. Дифракция на конечной системе цилиндров. Радиотехника и электроника, № II, I972, с. 2433- - 2435.

I5. Кюркчан А.Г. Представление Рэлея и Зоммерфельда для дифрагированных полей и области их сходимости. Радиотехника и электроника, I982, № 2, т. ХХУП, с. 233-24I.

I6. Кюркчан А.Г. Границы применимости представления Рэлея и Зоммерфельда в трехмерных задачах дифракции волн. т. ХХУШ, № 7, I983, с. I275-I284.

I7. Апельцин В.Ф. Метод неортогональных рядов и гипотеза Рэлея во внешних задачах дифракции. Известия вузов. Радиофизика, т. ХХУ, № 3, I982, с. 339.

I8. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д. Радиотехника и электроника, ХХIУ, № 7, I979 г.

I9. Вашковский А.В., Овчаров В.Т. К нахождению распределения потенциала в области, ограниченной электродами заданной формы с заданными потенциалами. Электронная техника, серия I. Электроника СВЧ, I97I, вып.IX, стр.34-37.

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. Введение 3
2. Решение задач дифракции методом вспомогательных источников 5
3. Решение внутренних задач методом вспомогательных источников 9
4. Выбор вспомогательных параметров I7
5. Учет сложности рассеивающего тела I9
6. Учет сложности падающего поля 27
7. Сходимость результатов расчета при решении внутренних задач 35
8. Вспомогательная функция для внутренних задач 40
9. Основные выводы и рекомендации по использованию метода вспомогательных источников 43
I0. Примеры решения конкретных задач
I. Поле тела рассеяния, расположенного вблизи границы раздела сред 45
2. Продольно-регулярный диэлектрический волновод 52
Литература 63